Índice

Casa matriz: Av. San Juan 777
(C1147AAF)
Ciudad de Buenos Aires, Argentina
Teléfono y fax: (5411) 5031-5400
E-mail: educacion@longseller.com.ar
www.longseller.com.ar
ISBN Obra Completa: 987-9481-66-6
Queda hecho el depósito que dispone la ley 11.723.

510.72 ALT
Altman, Silvia Viviana
Matemática Polimodal: Respuestas y soluciones / Silvia Altman Liliana Kurzrok y Claudia Comparatore.- 1ª ed.-
Buenos Aires: Longseller, 2002.
64 p. ; 28x20cm.- (Libros temáticos)
ISBN 987-550-250-2
I. Kurzrok, Liliana II. Comparatore, Claudia III. Título-
1. Matemática-Enseñanza

Presentación

La Serie Libros Temáticos de Matemática está compuesta por ocho títulos para los estudiantes que desarrollan los contenidos sustantivos de la disciplina, organizados temáticamente. Cada profesor puede decidir si le conviene seguir la secuencia recomendada para cada año, o si prefiere combinar los libros según las necesidades y los intereses de la institución y el grupo.
Las respuestas a todas las actividades planteadas en los libros temáticos no se incluyen en los libros, para que los alumnos no se centren en el resultado de los problemas, sino que se esfuercen en los procedimientos y las estrategias que encaran, justificando cada paso realizado. Si el docente lo cree pertinente, en la instancia de repaso, puede proporcionarles a los alumnos los resultados a fin de agilizar la corrección y sólo centrarse en las actividades que presentan alguna diversidad o puntos de discusión interesantes para ser abordados por toda la clase.

Las autoras

▮ Silvia V. Altman
Profesora de Matemática y Astronomía (INSP "Joaquín V. González").
Posgrado en Gestión Curricular: Formación de Coordinadores de Ciclo y Área en Matemática (FLACSO).
Autora de libros para EGB 3 y Polimodal.
Expositora del trabajo: "Función lineal, una propuesta diferente", en el III Simposio Internacional de Educación Matemática, Universidad Nacional de Luján, Centro Regional Chivilcoy, Chivilcoy (5/2001).
Ganadora del subsidio para profesores de colegios secundarios. Fundación Antorchas (1994).
Docente en EGB 3 y Polimodal desde 1987. Docente en la Facultad de Ciencias Económicas, UBA (1987-1993).

▮ Claudia R. Comparatore
Licenciada en Matemática (UBA).
Autora de libros para EGB 3 y Polimodal.
Expositora del trabajo: "Función lineal, una propuesta diferente", en el III Simposio Internacional de Educación Matemática, Universidad Nacional de Luján, Centro Regional Chivilcoy, Chivilcoy (5/2001).
Ganadora del subsidio para profesores de colegios secundarios. Fundación Antorchas (1994).
Docente en EGB 3 y Polimodal desde 1989.
Docente en la Facultad de Ciencias Exactas, Ciencias Económicas y CBC, UBA (1983-2001).
Becaria de investigación en el CONICET (1984-1986).

■

▮ Liliana E. Kurzrok
Licenciada en Matemática (UBA).
Formación docente para profesionales: profesora de Matemática (ORT).
Autora de libros para Polimodal.
Becaria de investigación en el CONICET.
Becaria de investigación en la UBA.
Expositora del trabajo: "Función lineal, una propuesta diferente", en el III Simposio Internacional de Educación Matemática, Universidad Nacional de Luján, Centro Regional Chivilcoy, Chivilcoy (5/2001).
Docente en EGB 3 y Polimodal desde 1991.
Docente en la Facultad de Ciencias Exactas, UBA (1985-1993) y en el CBC.

La Serie Libros Temáticos de Matemática

En esta serie, se propone trabajar con problemas que en su resolución planteen la necesidad de construir nuevos conocimientos matemáticos.
En una primera instancia, proponemos que los alumnos reflexionen en grupos pequeños sobre las situaciones planteadas. En un segundo momento, se gestiona una puesta en común, en la cual los distintos grupos intercambian ideas y estrategias, comunican y justifican los procedimientos propios, y analizan la validez de los propuestos por otros, lo cual siempre resulta enriquecedor.
Esta serie plantea, por un lado, problemas que muestran la utilidad de la Matemática para resolver situaciones de la realidad y, por el otro, problemas internos de la disciplina, ya que éstos permiten entenderla como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento y como modo de argumentación. Si se piensa en las aplicaciones como única forma de dar sentido, no se logra que el alumno comprenda que el conocimiento matemático también se produce para dar respuesta a problemas que surgen dentro de la disciplina, y se reduce la posibilidad de que se acerquen a la lógica interna de la Matemática.
Es de suma importancia el análisis de los procedimientos erróneos; antes de desecharlos, conviene reflexionar sobre lo que condujo a implementarlos y tener esto en cuenta en situaciones similares. Este trabajo es fundamental en la construcción de los nuevos conocimientos.
Al finalizar cada capítulo, es conveniente que los alumnos vuelvan a leerlo. El objetivo es identificar los conocimientos aprendidos y clasificar los problemas según las distintas estrategias que permitieron resolverlos. Luego puede encararse la resolución de los problemas presentados en las guías de ejercitación y autoevaluación, ubicadas en las últimas páginas de cada capítulo.

Enfoque disciplinar y pedagógico

Muchas veces se piensa que la Matemática es una ciencia cerrada, en la que ya no hay nada por descubrir y que no interactúa con otras disciplinas. Sin embargo, su historia permite ver que, en muchos casos, sus avances responden a necesidades surgidas en el campo de otras disciplinas –informática, química, física, medicina, biología y economía, entre otras– que recurren con frecuencia a sus fundamentos.

El punto de partida de un matemático para avanzar en sus investigaciones es buscar la solución a un determinado problema, tanto interno de la Matemática como surgido de otra ciencia.

La enseñanza de la Matemática tiene que poder atrapar los rasgos fundamentales del modo de pensar y producir en la disciplina; por lo tanto, el docente se pregunta cómo lograr que los alumnos construyan el sentido de los conceptos que se propone enseñar. En la construcción del sentido de un concepto intervienen un amplio conjunto de problemas para los cuales ese concepto sea un instrumento adecuado; la identificación de procedimientos válidos para estos problemas; formas de representación del concepto que lo caracterizan y, también, el reconocimiento de situaciones para las cuales ese concepto no es eficaz.

Con este objetivo, se les presenta a los alumnos diferentes problemas abiertos, que permitan poner en juego situaciones de argumentación, de modelización, de integración entre las diferentes formas de representación, y una diversidad de estrategias de resolución.

Se entiende por “problemas” aquellos que ponen en juego los conocimientos con los que cuenta el alumno y que, por presentar algún tipo de dificultad, los torna insuficientes y lo obliga a desarrollar nuevos conocimientos. Para este desarrollo es necesario que modifique los conocimientos que tenía hasta el momento, que rechace algunos conceptos y enriquezca otros.

Para aprender a través de la resolución de problemas, es necesario reflexionar a partir de ellos, ya que los nuevos conceptos no aparecerán automáticamente al terminar de resolverlos. La resolución de los problemas nos llevará a establecer nuevas relaciones entre conocimientos incorporados.

Por todo lo anterior, estudiar Matemática no requiere la repetición indiscriminada de problemas iguales, sino un análisis de las nuevas relaciones establecidas, de su vínculo con conceptos ya conocidos, de la identificación de los problemas que los nuevos conceptos permiten resolver y de aquellos para los cuales no son adecuados.

La Matemática es una ciencia deductiva y por eso es que se pone especial énfasis en la justificación de cada nuevo concepto, en las demostraciones y demás, para que los alumnos puedan determinar “el porqué” de cada herramienta y procedimiento que utilizan, y para que no memoricen sino que deduzcan.

El quehacer matemático no es privativo de unos pocos. Con perseverancia, trabajo y reflexión, todos pueden progresar y acceder a los saberes propios de la Matemática.

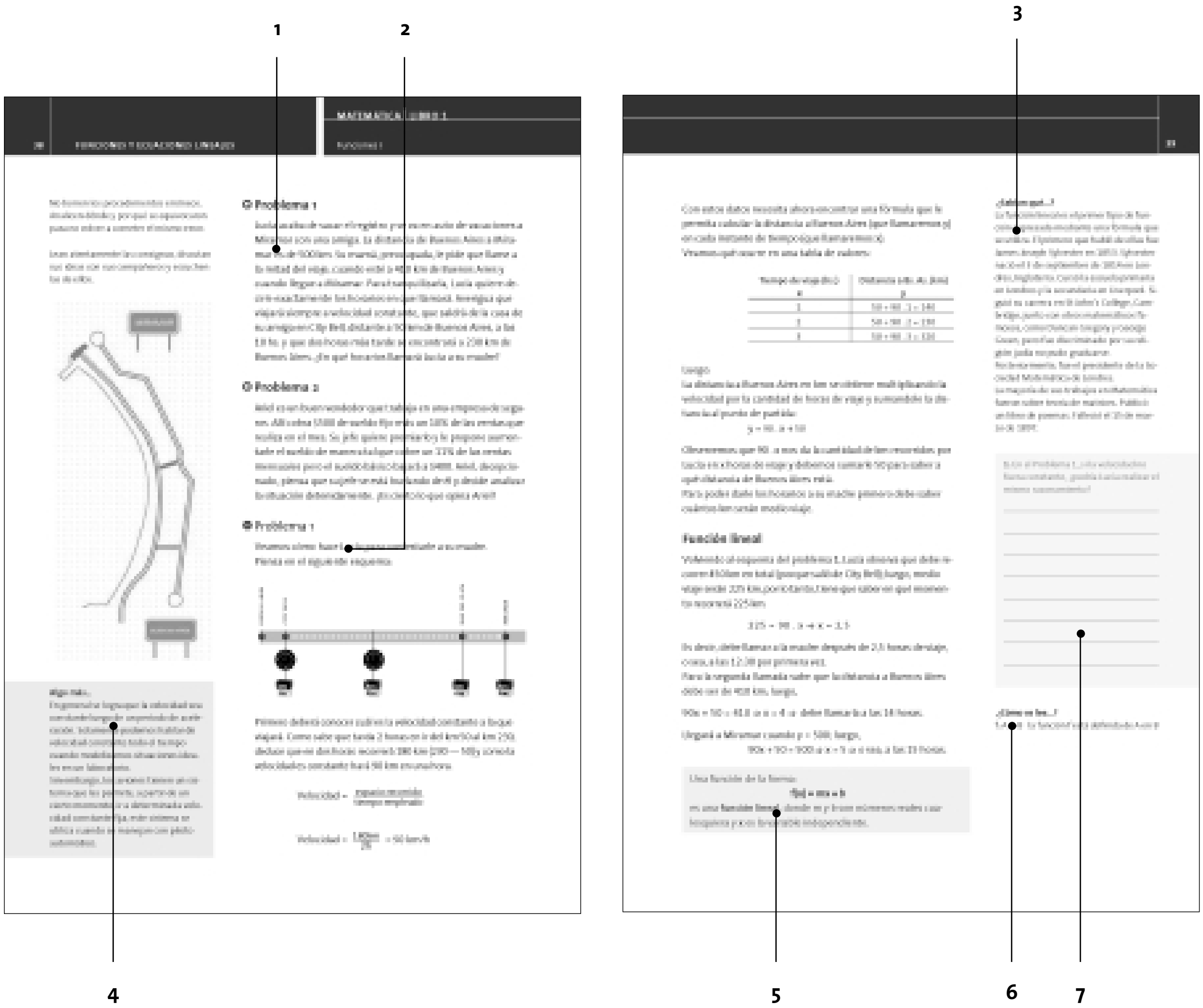
Los Libros

LIBRO 1 FUNCIONES 1	LIBRO 2 FUNCIONES 2	LIBRO 3 NÚMEROS Y SUCESIONES	LIBRO 4 VECTORES
Capítulo 1 *Funciones* *Capítulo 2* *Funciones y ecuaciones lineales* *Capítulo 3* *Inecuaciones lineales con una y dos variables. Programación lineal* *Capítulo 4* *Funciones y ecuaciones cuadráticas*	*Capítulo 1* *Funciones y ecuaciones polinómicas* *Capítulo 2* *Funciones racionales y funciones homográficas. Ecuaciones e inecuaciones racionales* *Capítulo 3* *Funciones y ecuaciones exponenciales y logarítmicas* *Capítulo 4* *Funciones y ecuaciones trigonométricas*	*Capítulo 1* *Números reales* *Capítulo 2* *Operaciones con radicales* *Capítulo 3* *Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas* *Capítulo 4* *Números complejos*	*Capítulo 1* *Vectores en el plano* *Capítulo 2* *Vectores en el espacio* *Capítulo 3* *Geometría analítica* *Capítulo 4* *Cónicas*

LIBRO 5 ANÁLISIS 1	LIBRO 6 ANÁLISIS 2	LIBRO 7 MATRICES	LIBRO 8 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
El concepto de límite *Cálculo de límites* *Asíntotas* *Continuidad*	*Derivadas* *Aplicaciones de la derivada* *Integrales indefinidas* *Cálculo de áreas*	*Sistemas de ecuaciones lineales* *Operaciones con matrices* *Determinantes* *Matriz inversa*	*Combinatoria* *Probabilidad* *Estadística descriptiva* *Variables aleatorias*

Los capítulos

1	Problemas	*Para introducir todos los temas, se plantean problemas a partir de los cuales los alumnos podrán ir desarrollando los nuevos conceptos.* *Se propone que en un primer momento los problemas sean resueltos en pequeños grupos y luego se discutan las diferentes estrategias de resolución para, así, fomentar la justificación de la validez de las producciones propias y las de los compañeros.*
2	Posible resolución	*En esta sección, se desarrolla una posible resolución de los problemas planteados. Ésta es sólo una de las formas de resolución y no por eso otras diferentes están mal. A medida que las resoluciones lo requieran, irán apareciendo las definiciones, propiedades y demás que permitan avanzar en los temas propuestos.*
3	¿Sabían que...?	*En esta sección, se hace referencia a quienes hicieron diferentes aportes a la Matemática, como descubrimientos de nuevos conceptos, utilización de nuevos símbolos y notaciones, y algunos otros hechos interesantes.*
4	Algo más...	*Aquí se presentan comentarios, recordatorios e información complementaria de los temas desarrollados en la parte central.*
5	Textos recuadrados	*Las definiciones están recuadradas, y aparecen en negrita las conclusiones, las propiedades y los teoremas.*
6	¿Cómo se lee?	*A medida que se necesitan, aparecen los significados de los símbolos matemáticos.*
7	Actividades	*Se proponen actividades que sirven para afianzar los contenidos de los problemas del cuerpo central y para la aplicación de los nuevos conceptos a distintas situaciones. Las respuestas figuran en este libro.*



1 Problemas

2 Posible resolución

3 ¿Sabían que...?

4 Algo más...

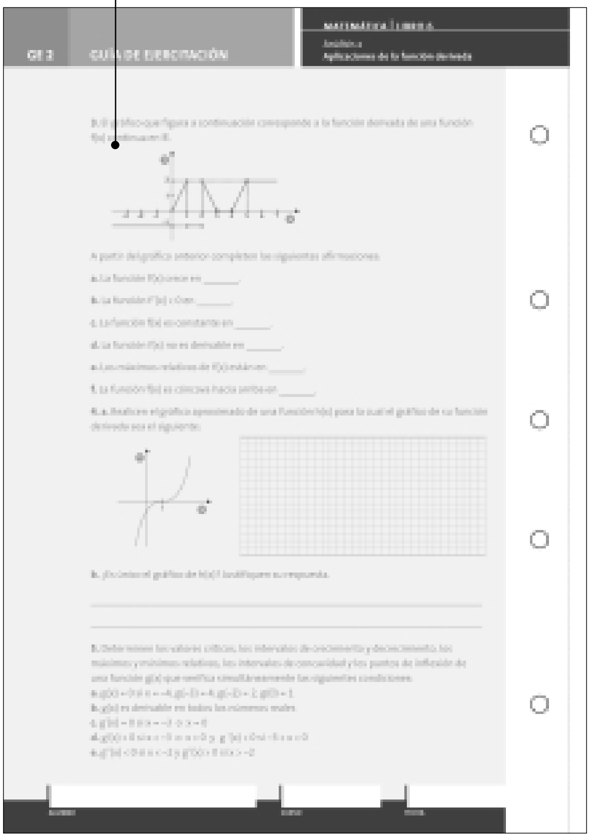
5 Textos recuadrados

6 ¿Cómo se lee?

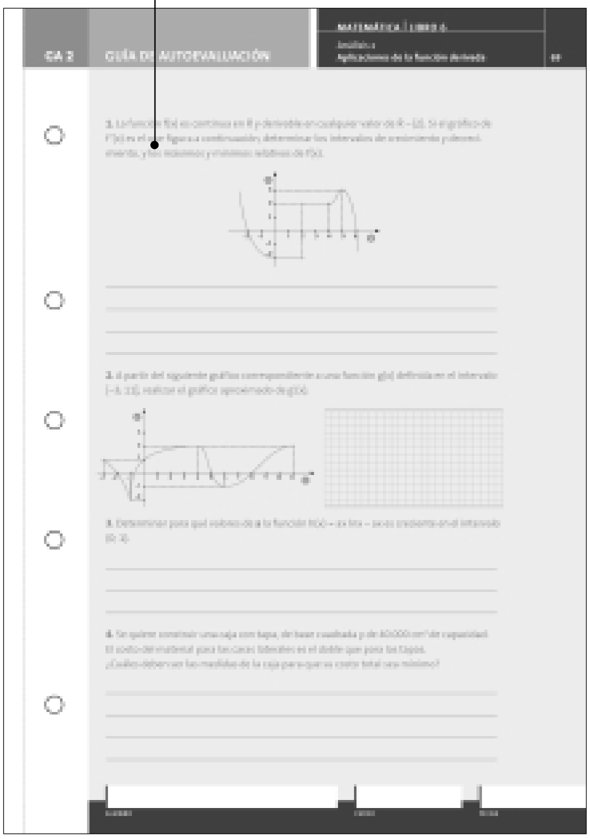
7 Actividades

■

1



2



1	Guía de ejercitación	*Se proponen actividades de integración de los conceptos trabajados en el capítulo.*
2	Guía de autoevaluación	*Se proponen actividades que sirven tanto de repaso como de autoevaluación de los conocimientos adquiridos. Las respuestas de estas actividades se encuentran al final de cada libro para que los alumnos las utilicen en la corrección.*

Capítulo 1

p | **13**

1. Se vendieron autos que se habían producido anteriormente al período analizado.
2. **a.** La relación entre la edad y el peso cerebral y la relación entre la edad y el peso corporal.
   b. Que cuando la persona es adulta, el peso cerebral es de 1400 g y el peso corporal, de 70 kg.

p | **14**

3. Los números enteros del 0 al 9 con las letras del abecedario.
4. En el problema 1 | la variable independiente son los meses del año y las dependientes, las ventas y la producción de autos.
   En el problema 2 | la variable independiente es el peso y la temperatura de los bebés y la dependiente, la dosis del medicamento.
   En el problema 3 | la variable independiente son las letras y la dependiente, los números correspondientes a cada letra.
5. Son funciones **a.** y **b.** porque a cada valor de la variable dependiente se le asigna un único valor de la variable independiente. **c.** no es función porque al 15 se le asignan dos valores distintos.

p | **15**

6. El primero, el segundo, el tercero y el cuarto.

p | **16**

7. **a.** Dom f = $\mathbb{R}$; Im f = $\mathbb{R}$
   b. Dom f = $\mathbb{R}$; Im f = $[0; +\infty)$
   c. Dom f = $[0; +\infty)$; Im f = $[0; +\infty)$
   d. Dom f = $\mathbb{R} - \{-3\}$; Im f = $\mathbb{R} - \{0\}$
   e. Dom f = $\mathbb{R}$; Im f = $\mathbb{R}$

p | **17**

8. **a.** A los 15 años.
   b. Aproximadamente, a los 7 años y a los 26 años.
   c. Entre los 5 y los 15 años.

p | **18**

9. Para f(x): $x = \dfrac{5}{2}$
   Para g(x): $x = 4$ y $x = -4$
   Para h(x): $x = \dfrac{1}{3}$ y $x = -3$
10. Los reconocemos gráficamente porque son los puntos donde el gráfico de la función corta al eje de las abscisas. Los reconocemos en la tabla porque son los valores de **x** cuya imagen es el 0.

p | **19**

11. **1.** Máximo absoluto = (70; 30)
    Máximo relativo = (20; 22,5)
    Mínimo absoluto = (50; 0)
    Mínimo relativo = (90; 10)
    2. Máximo absoluto = (90; 325)
    Máximo relativo = (20; 200) y (50; 300)
    Mínimo absoluto = (107; 0) y (0; 0)
    Mínimo relativo = (33; 100) y (60; 200)

p | **20**

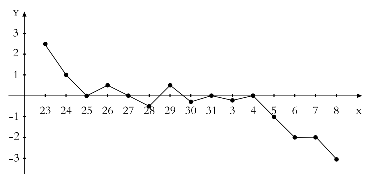
12. Sí, porque si f es par, f(x) = f(–x) ⇒ (x, f(x)) es simétrico con (–x, f(–x)) respecto del eje **y**.
13. Dom f = {1991; 1992; 1993; 1994; 1995; 1996; 1997; 1998; 1999; 2000}
    Im f = {–3,5; –3; –0,3; 4; 5,5; 6; 8; 10; 10,5}
    Corta al eje en **x** = 2000.
    Crece entre los años 1995 y 1997, y entre 1999 y 2000.
    Decrece entre los años 1991 y 1995, y entre 1997 y 1999.
    C^+ = {1991; 1992; 1993; 1994; 1996; 1997; 1998}
    C^- = {1995; 1999; 2000}

p | **21**

14. Sí, porque si f es impar, f(x) = –f(–x); por lo tanto, (x, –f(x)) y (–x, f(–x)) son puntos simétricos respecto de (0; 0).

p | **22**

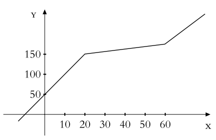
15. El primero con período = 4.
16. **a.** Máximo = (23 de agosto; 184,5)
    Mínimo = (8 de septiembre; 179)
    Crece del 25 al 26 de agosto; del 28 al 29 de agosto; del 30 al 31 de agosto y del 3 al 4 de septiembre.
    Decrece del 23 al 25 de agosto; del 26 al 28 de agosto; del 29 al 30 de agosto; del 31 de agosto al 3 de septiembre; del 4 al 6 de septiembre y del 7 al 8 de septiembre.
    b. Es positiva del 23 al 25 de agosto; el 26 y el 29 de agosto.



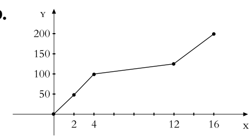
Es negativa el 28 y el 30 de agosto, el 3 de septiembre y del 4 al 8 de septiembre.

p | **24**

17. La gráfica de f(x + a) es igual a la gráfica de f(x) corrida **a** unidades hacia la izquierda si a > 0, y **a** unidades hacia la derecha si a < 0.
    La gráfica de f(x) – a es igual a la gráfica de f(x) corrida **a** unidades hacia abajo si a > 0, y **a** unidades hacia arriba si a < 0.
18. La altura del gráfico se duplica sobre el eje **y**.
19. **a.**



b.

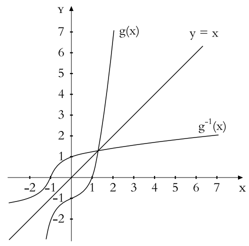


p | **25**

20. f(x) es biyectiva; g(x) no es ni inyectiva ni sobreyectiva; por lo tanto, no es biyectiva; h(x) es biyectiva; i(x) es biyectiva.

p | **26**

21. Si una función no es inyectiva, su relación inversa no es función por no cumplir la condición de que cada elemento del dominio tenga imagen única.
    Si una función no es sobreyectiva, su relación inversa no es función por no cumplir la condición de que exista una imagen para cada valor del dominio.
22. No se puede graficar $f^{-1}(x)$ pues f(x) no es biyectiva.



Son simétricas respecto de y = x.

p | **28**

23. **a.** Dom f = {1; 2; 3, 4; 5}
    Im f = {2; 3; 4; 7; 8}
    Dom g = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}
    Im g = {1; 3; 4}
    b.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
fog(x)	2	2	2	3	3	4	4	4

x	1	2	3	4	5
gof(x)	3	1	4	4	1

24. fog(x) = 2x + 5
    hog(x) = $4x^2$
    goh(x) = $2x^2$
    gof(x) = 2x + 10

Guía de ejercitación

1. Son funciones:
   a. Dom f = {3; 4, 5; 6; 7, 8}; Im f = {5}
   b. Dom f = {1; 2; 4; 7}; Im f = {1; 3; 5; 9}
   c. No es función.
   d. Dom f = {1; 2; 3; 4; 5}; Im f = {0; 2; 4; 6; 8}
   e. Dom f = {1; 2, 4, 8, 16}; Im f = {0; 1; 2; 3; 4}
2. **a.** Dom = $\mathbb{Q}^+$
   b. Dom = $\mathbb{N}$
   c. Dom = $\mathbb{R}^+$
3. **a.** El primero, el segundo y el tercero.
   b. Para el primer gráfico: Dominio = $\mathbb{R}$, Imagen = $(-\infty; 0]$
   Para el segundo gráfico: Dominio = $\mathbb{R}$, Imagen = {1}
   Para el tercer gráfico: Dominio = $\mathbb{R}$,

Imagen = $\mathbb{Z}$

4. Dom f = $\mathbb{R}$ – {–5}; Dom g = (25; +∞)
Dom h = $\mathbb{R}$; Dom i = $\mathbb{R}$ – {2; –2}

5. Dom h = $\mathbb{R}$ – { –7} Im h = $\mathbb{R}$ – {0]

Dom i = $\mathbb{R}$ – {2; –2} Im i = $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup (0; +\infty)$

Dom j = $\mathbb{R}$ Im j = $\left(0; \frac{1}{4}\right]$

Dom k = $\mathbb{R}$ Im k = $\mathbb{R}$

Dom l = (–∞; –2] ∪ [2; +∞) Im l = [0; +∞)

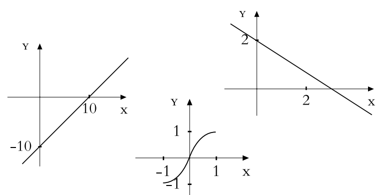
6. En ambos casos:
Dom = {1991; 1992; 1993; 1994; 1995; 1996; 1997; 1998; 1999; 2000}
En el de desocupados:
Im = {0,7; 0,8; 1,1; 1,4; 1,6; 1,7; 1,8; 2; 2,05}
Crece de 1991 a 1996 y de 1998 a 2000.
Decrece de 1996 a 1998.
En el de pobreza:
Im = {17; 18; 19; 21; 26; 28,9; 27; 28; 25}
Crece de 1993 a 1996 y de 1998 a 2000.
Decrece de 1991 a 1993 y de 1996 a 1997.

7. No es posible.

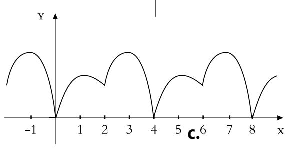
8. Son funciones pares las dos primeras; es impar la última.

9. **a.** Biyectiva.
b. Ni inyectiva ni sobreyectiva.
c. Sobreyectiva.

10.

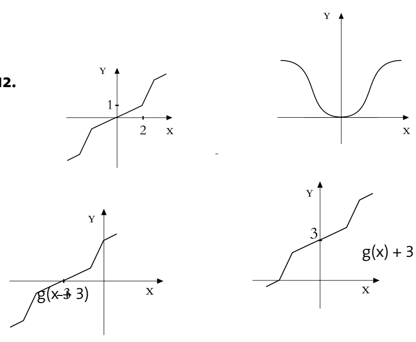


11. **a.**

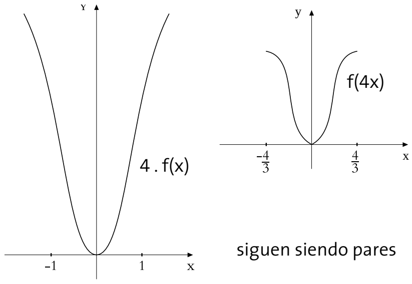


b. **c.**

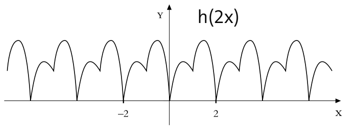
12.



no son impares



siguen siendo pares



sigue siendo periódica

13. La función correspondiente al gráfico **b.** es biyectiva.

14. **a.** No, porque no sería el gráfico correspondiente a una función.
b. Es verdadero pues f(x) = f(–x) ∀ x ⇒ no es inyectiva.

15. fog(x) = 15x + 1; hog(x) = $125x^2$; goh(x) = $25x^2$; gof(x) = 15x + 5.

16. No se puede encontrar la función inversa de la función f(x) pues no es biyectiva.
$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

17. **a.** f(x) = 0,9 . x
b. f(x) = 1,21 . x
c. f(x) = 1,089 . x

Capítulo 2

p | **39**

1. No podría realizar el mismo razonamiento si la velocidad no fuera constante.

p | **40**

2. **a.** f(x) = 500 – 90 . x
b. Aproximadamente, a las 2 horas 46 minutos 47 segundos y a la hora de haber salido.
c. La pendiente es m = –90 y su signo indica que la función es decreciente (regresa).

3. La ordenada al origen es f(0) = m . 0 + b = b.
La raíz es cuando f(x) = 0 ⇒

$\Rightarrow 0 = mx + b \Rightarrow x = -\frac{b}{m}$ si $m \neq 0$

Si m = 0, la función lineal es f(x) = b.

Si b ≠ 0, no tiene raíces.

4. Porque la duración total del viaje es de 5 horas (el tiempo no puede ser negativo).

5. No, las rectas verticales no corresponden a gráficas de funciones, ya que para el mismo valor de **x** hay infinitos valores de **y**.

p | **42**

6. La pendiente se puede calcular con la misma fórmula, sólo que, en el caso de ser una función constante, m = 0.

7. Llamando **m** a la pendiente y **b** a la ordenada al origen:

a. m = –5; b = 8 **d.** $m = -\frac{5}{9}$; $b = \frac{4}{3}$

b. m = 9; b = –8 **e.** $m = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{2}$

c. $m = \frac{3}{2}$; b = 1 **f.** m = 2; b = –18

8. Son crecientes: **b. c. e.** y **f.**
Son decrecientes **a.** y **d.**

9. Deberá vender más de $10.000.

p | **43**

10. Los gráficos se numeran de izquierda a derecha.

1. a. Es lineal, m = 5 y b = 3.

2. b. No es lineal.

3. d. Es lineal, m = –2 y b = 2.

4. f. Es lineal, $m = -\frac{1}{3}$ y $b = -\frac{2}{3}$.

5. e. No es lineal.

6. c. Es lineal, m = 2 y b = –8.

p | **44**

11. **a.** Verdadero, porque el gráfico de la función corta al semieje positivo **y**.
b. Falso. Es x = 0.
c. Falso. La pendiente de la recta graficada no puede ser m = –1, pues sería decreciente.

p | **45**

12. Gráfico 1 → condición 4, porque es creciente y corta al eje **y** en un punto cuya ordenada es positiva.
Gráfico 2 → condición 1, porque es decreciente y corta al eje **y** en un punto cuya ordenada es positiva.
Gráfico 3 → condición 2, porque es decreciente y corta al eje **y** en el origen.
Gráfico 4 → condición 3, porque es constante y corta al eje **y** en un punto cuya ordenada es positiva.

p | **46**

13. A = (1; 3), B = (2; 1), C = (4; 2) y D = (3; 4)

$\left.\begin{array}{l} 3 = m + b \\ 4 = 3m + b \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \quad b = \frac{5}{2}$

Recta que pasa por B y C .

$\left.\begin{array}{l} 1 = 2m + b \\ 2 = 4m + b \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \quad b = \frac{5}{2}$

Recta que pasa por C y D.

$\left.\begin{array}{l} 2 = 4m + b \\ 4 = 3m + b \end{array}\right\} \Rightarrow m = -2 \quad b = 10$

Recta que pasa por B y A.

$\left.\begin{array}{l} 3 = m + b \\ 1 = 2m + b \end{array}\right\} \Rightarrow m = -2 \quad b = 5$

14. Las rectas son paralelas, porque la segunda recta tiene ecuación $y = 8x + \frac{29}{3}$; por lo tanto, tienen la misma pendiente.

p | **47**

15. D = (2; 1), porque AB: $y = x + 1$; CD: $y = x - 1$; BC: $y = -x + 5$; AD: $y = -x + 3$

16. No, porque si buscamos las ecuaciones de las rectas que pasan por A y B, y por B y C, comprobamos que éstas no son perpendiculares.

p | **48**

17. Si tomamos las dos primeras columnas de la tabla, obtenemos que:

$$m = \frac{1{,}85}{50} = 0{,}037$$

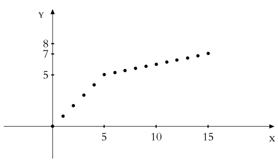
Sin embargo, si tomamos las columnas 3 y 4, obtenemos que:

$$m = \frac{18{,}50}{-550} = 0{,}03363;$$ luego, no es una función lineal.

18. Si se consumen 79 kwh, se pagan $16,90; si se consumen 186 kwh, se pagan $20,082.

p | **49**

19. **a.** Recuerda 7 láminas.
b. Tenía 10 imágenes.
c.



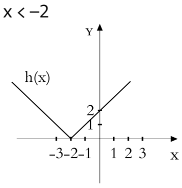
p | **50**

20.
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x - 3 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{4}{7}x + 1 & \text{si} \quad 0 < x < 7 \\ -x + 10 & \text{si} \quad x \ge 7 \end{cases}$$

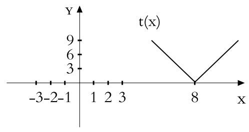
p | **51**

21. **a.** $S = \{-9; 9\}$
b. $S = \phi$
c. $S = \{0\}$
d. $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$
e. $S = \{-7; 9\}$

22.
$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \ge -2 \\ -x - 2 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$$



$$t(x) = \begin{cases} 3x - 24 & \text{si} \quad x \ge 8 \\ -3x + 24 & \text{si} \quad x < 8 \end{cases}$$



p | **52**

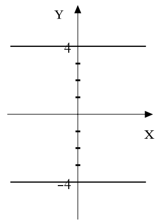
23. Pedro tiene 84 años y Miguel 16.

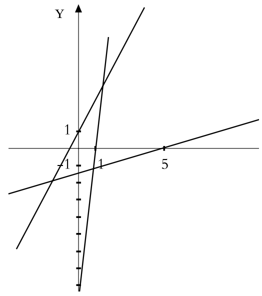
24. Hay infinitas soluciones, dado que el sistema está formado por dos ecuaciones que son equivalentes.

25. **a.** $|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|$
Demostración:
Caso 1: $x \ge 0, y \ge 0$.
Si $x \ge 0, y \ge 0 \Rightarrow x \,.\, y \ge 0 \Rightarrow |x \,.\, y| = x \,.\, y$.
Como $|x| = x, |y| = y \Rightarrow |x \,.\, y| = x \,.\, y = |x| \,.\, |y|$.
Caso 2: $x \ge 0, y < 0$.
Si $x \ge 0, y < 0 \Rightarrow x \,.\, y < 0 \Rightarrow |x \,.\, y| = -(x \,.\, y)$.
Como $|x| = x, |y| = -y \Rightarrow |x \,.\, y| = -x \,.\, y =$
$= x \,.\, (-y) = |x| \,.\, |y|$.
Caso 3: $x < 0, y \ge 0$.
Si $x < 0, y \ge 0 \Rightarrow x \,.\, y < 0 \; |x \,.\, y| = -(x \,.\, y)$.
Como $|x| = -x, |y| = y \Rightarrow |x \,.\, y| = -x \,.\, y = |x| \,.\, |y|$
Caso 4: $x < 0, y < 0$.
Si $x < 0, y < 0 \Rightarrow x \,.\, y > 0 \Rightarrow |x \,.\, y| = x \,.\, y$.
Como $|x| = -x, |y| = -y \Rightarrow |x \,.\, y| =$
$= x \,.\, y = (-x) \,.\, (-y) = |x| \,.\, |y|$.
b. $|x| = |y| \Rightarrow x = y$ ó $x = -y$
Demostración:
Caso 1: $x \ge 0, y \ge 0$.
Como $x \ge 0, y \ge 0 \Rightarrow |x| = x, |y| = y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ si $|x| = |y| \Rightarrow x = y$.
Caso 2: $x \ge 0, y < 0$.
Como $x \ge 0, y < 0 \Rightarrow |x| = x, |y| = -y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ si $|x| = |y| \Rightarrow x = -y$
Caso 3: $x < 0, y \ge 0$.
Como $x < 0, y \ge 0 \Rightarrow |x| = -x, |y| = y \Rightarrow$ si $|x| = |y| \Rightarrow$
$\Rightarrow -x = y \Rightarrow x = -y$
Caso 4: $x < 0, y < 0$.
Como $x < 0, y < 0 \Rightarrow |x| = -x, |y| = -y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ si $|x| = |y| \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$.
c. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \ne 0$.
Demostración:
Caso 1: $x \ge 0, y > 0$.
Si $x \ge 0, y > 0 \Rightarrow \; > 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y}$.
Como $|x| = x, |y| = y \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|}$
Caso 2: $x \ge 0, y < 0$.
Si $x \ge 0, y < 0 \Rightarrow \; < 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = -\left(\frac{x}{y}\right)$.
Como $|x| = x, |y| = -y \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y} = \frac{|x|}{|y|}$
Caso 3: $x < 0, y > 0$.
Si $x < 0, y > 0 \Rightarrow \; < 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = -\left(\frac{x}{y}\right)$.
Como $|x| = -x, |y| = y \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|}$
Caso 4: $x < 0, y < 0$.
Si $x < 0, y < 0 \Rightarrow \; > 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y}$.
Como $|x| = -x, |y| = -y \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y} =$
$= \frac{-x}{-y} = \frac{|x|}{|y|}$

p | **53**

26. **a.** $S = \phi$ **b.** $S = \phi$





p | **54**

27. Una posible respuesta es:

a. $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{5}{2}x - 5 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ 3y = -6x + 12 \end{cases}$

28. Una posible respuesta es:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 6 - 2y \end{cases}$

p | **55**

29. Debe colocar 7 kg de té fuerte y 3 kg de té con canela.

30. Debe verificarse: $\begin{cases} 7x + 12y = 10 \\ x + y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$
$S = \phi$, luego, don José no puede vender café en estas condiciones.

31. Lo deberá vender a $8,67 el kilo (si colocara 400 g y 600 g, y no cumpliera la tercera condición).

p | **56**

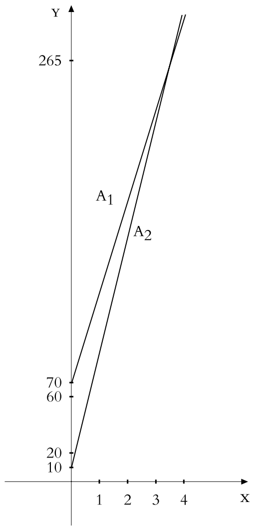
32. **I.** Si $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$
II. No existe ningún valor de **k**.
III. Si $k = -1$, el sistema es incompatible.

33. Una respuesta posible es: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + 3y = 8 \end{cases}$

34. No puede, pues (0; 0) es solución del sistema.

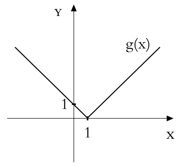
Guía de ejercitación

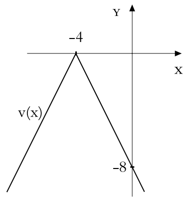
1. **a.** 15 cm **d.** $5\ \frac{cm}{s}$
   b. 115 cm **e.** 9 segundos
   c. 100 cm **f.** y = 5x + 15
2. **a.** V. y = 1200 + 100x
   b. La pendiente es m = 100 e indica el ahorro mensual, la ordenada al origen es b = 1200 e indica el monto inicial.
3. **a.** El segundo auto va más rápido, ya que su velocidad es mayor.
   b. Primer auto: y = 65x + 70; segundo auto: y = 80x + 25.
   c. Aproximadamente, a las 3 horas 41 minutos 32 segundos de haber comenzado el viaje.
   d. A los 52' 56".
   e. Se encuentran después de 3 horas de haber comenzado el viaje y lo hacen a 265 km de Buenos Aires.
   f.



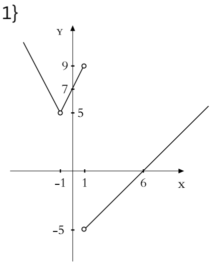
4. El primer gráfico, porque tiene pendiente negativa y ordenada al origen positiva.
5. **a.** No.
   b. Sí. Pertenecen a la recta de ecuación: y = 8x + 9.
6. **a.** y = −3x + 12 **e.** y = 9x + 23
   b. y = −2x + 7 **f.** y = 12x − 8
   c. $y = \frac{4}{3}x + 4$ **g.** $y = -\frac{13}{4}x - \frac{7}{4}$
   d. y = 2x + 4 **h.** $y = -\frac{4}{17}x + \frac{19}{17}$
7. y = −3x + 5
8. $y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$
9. **a.**, **b.** y **c.** son paralelas entre sí.
   e., **f.**, **d.** y **h.** son paralelas entre sí.
   a., **b.** y **c.** son perpendiculares a **e.**, **f.**, **d.** y **h.**
10. $y = -\frac{7}{4}x + \frac{19}{4}$
11. y = x + 6
12. (4; 4)
13. Nombrados de izquierda a derecha:
    a. $y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$ **c.** $y = -\frac{3}{2}x - 3$
    b. $y = \frac{3}{4}x - 1$ **d.** $y = -\frac{1}{6}x - \frac{7}{3}$
14. **a.** S = {0}
    b. S = {3}
    c. $S = \left\{ \frac{5}{2}; \frac{13}{2} \right\}$
    d. $S = \left\{ -8; \frac{2}{3} \right\}$
15. **a.** y = −|x| + 2 **c.** y = |x + 3| − 2
    b. y = |x + 3| **d.** $y = \left| \frac{x}{2} \right|$
16. **a.** Se invirtió y se corrió dos unidades hacia arriba.
    b. Se corrió tres unidades hacia la izquierda.
    c. Se corrió tres unidades hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo.
    d. No se corrió, se aplastó a la mitad de la altura original.
17. **a.** $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

    b. $v(x) = \begin{cases} -2x - 8 & \text{si} \quad x \geq -4 \\ 2x + 8 & \text{si} \quad x < -4 \end{cases}$

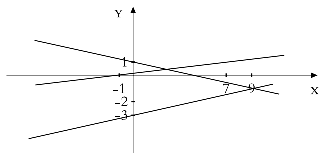




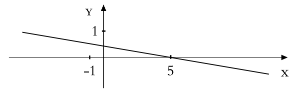
18. $\begin{cases} 1{,}12 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 200 \\ 1{,}12 + 0{,}12 \quad \text{si} \quad 200 \leq x < 400 \\ 1{,}12 + 0{,}24 \quad \text{si} \quad 400 \leq x < 600 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \text{en general,} \\ 1{,}12 + 0{,}12\ ([x - 200] - 1) \text{ donde} \\ [x - 200] \text{ es la parte entera de } x - 200. \end{cases}$
19. Dominio = ℝ − {−1; 1}
    Raíz: x = 6
    Ordenada: y = 7



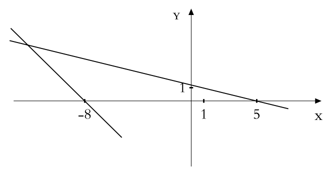
20. Una respuesta posible es:
    Dos sustancias químicas A y B deben mantenerse a baja temperatura. Se sabe que el doble de la temperatura de A más el triple de la de B debe ser de 1° y que la temperatura de A debe exceder en 2° al quíntuple de la de B. ¿A qué temperatura se debe mantener cada sustancia?
21. Una respuesta posible es: $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2 - 2y = 4x \end{cases}$
22. Tengo $23.
23. No se encuentran.
24. No pueden haber gastado dicha suma de dinero en esas condiciones
25. **a.** S = ϕ



    b. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 5 - 6y\}$



    c. $S = \left\{ \left(-\frac{37}{3}; \frac{13}{3} \right) \right\}$



26. **I.** Para $k \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{9}{5} \right\}$ el sistema es compatible determinado.
    II. Si $k = \frac{9}{5}$, el sistema es compatible indeterminado.
    III. No existe **k** para que el sistema sea incompatible.

Capítulo 3

p | **66**

1. **a.** $x \in \left(-\infty; \frac{9}{2} \right)$ **b.** Ninguno **c.** $x \in (-\infty; 1]$
2. **a.** $x \in \mathbb{R}$ **b.** $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty \right)$

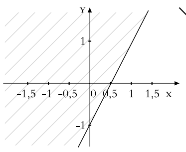
p | **68**

3. Una respuesta posible es: 2x − 3 ≥ 5x − 12.
4. Una respuesta posible es: 2 . (x + 1) − 5 < 3x + 2.
5. **a.** S = (−2; −1) **b.** S = ϕ

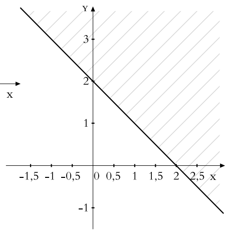
6. **a.** x = –1 ó x = 5 **b.** $x \in \left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ **c.** Ninguno.

p | **69**

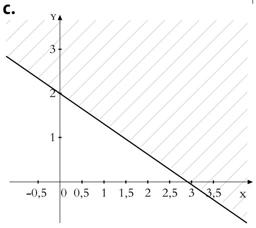
7. **a.**



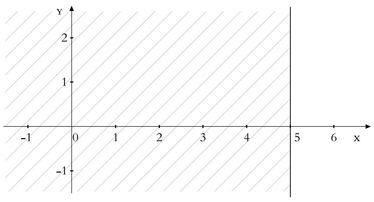
b.



c.



d.

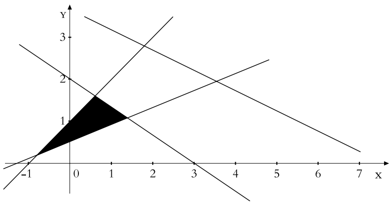


p | **70**

8.

Triciclos	2	4	6	8	10
Bicicletas	15	12	9	6	3

9.



10.

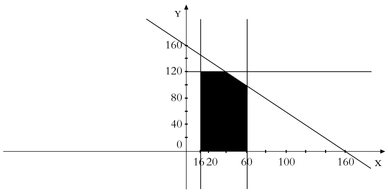
$$\begin{cases} 2x + y \le 20 \\ 2x + 3y \le 30 \\ y \le 0 \\ 2 \le x \le 8 \end{cases}$$

p | **71**

11. Puede producir hasta 40 mesas ratonas y hasta 60 mesas de comedor.

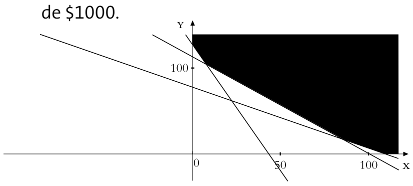
p | **73**

12. Debe fabricar 100 jueguitos Combo y 60 Samba.



p | **74**

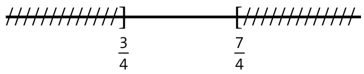
13. Debe utilizar 78 micros de $1200 y 28 micros de $1000.



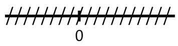
Guía de ejercitación

1. **a.** $S = \left[-\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right]$

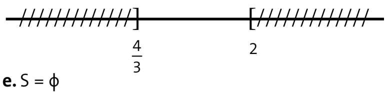
b. $S = \left(-\infty\ \frac{3}{4}\right] \cup \left[-\frac{7}{4};+\infty\right)$



c. $S = \mathbb{R}$

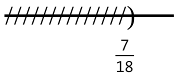


d. $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right] \cup \left[2;+\infty\right)$

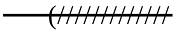


e. $S = \phi$

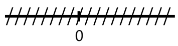
f. $\left(-\infty;\frac{7}{18}\right)$



g. S = (–2; +∞)



h. $S = \mathbb{R}$



2. Son respuestas posibles:
a. $6x - 4 \le 3x - 1$
b. $2 . (x - 4) + 1 < 6 . (x + 3) - 33$
c. $4 + x < 2x + 2 < 10 + x$
d. $-8 \le 1 - x \le 5$

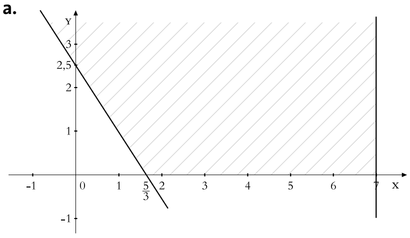
3.

Bebidas	0	1	2	4	5	6	8	9	10
Papas	25	24	23	22	21	20	19	18	17

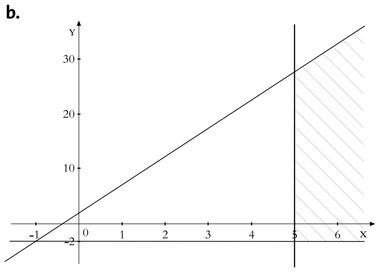
Bebidas	12	13	14	16	17	18	20	21	22
Papas	16	15	14	13	12	11	10	9	8

Bebidas	24	25	26	28	29	30	32	33
Papas	7	6	5	4	3	2	1	0

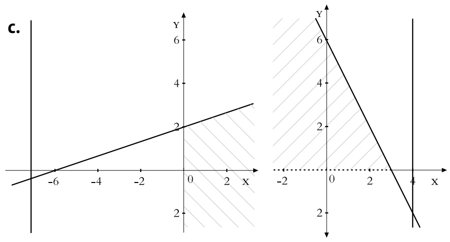
4. **a.**



b.



c.



5. **a.**

$$\begin{cases} 2y - x \le 2 \\ 6x + y \le 3 \\ y + 2x \le 2 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} y - x \le 1 \\ x + y \le 2 \\ 2y + x \le 3 \\ 1 > x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

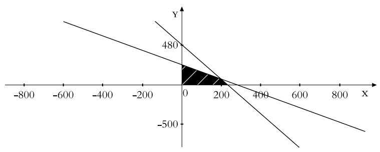
b.

$$\begin{cases} 3x - 4y \le 1 \\ 2y - 3x \le 0 \\ x + y \le 5 \end{cases}$$

d.

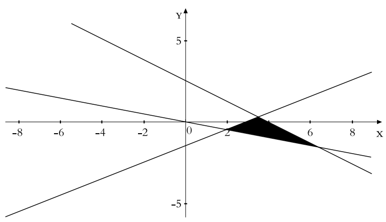
$$\begin{cases} 4x + y \ge 2 \\ x + 2y \ge 2 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

6. Aproximadamente, 206 peces del tipo A y 69 del tipo B.



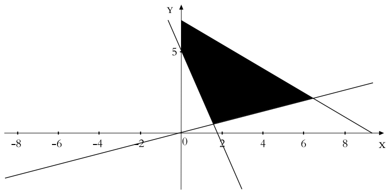
7. Máximo: $x = \frac{32}{5}$; $y = -\frac{8}{5}$; $M = \frac{112}{5}$.

Mínimo: x = 2; $y = -\frac{1}{2}$; M = 7.

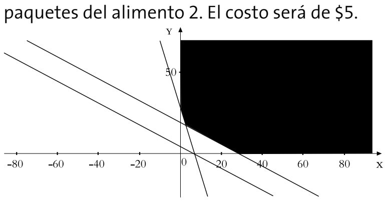


8. Máximo: x = 8; y = 2; N = 4.

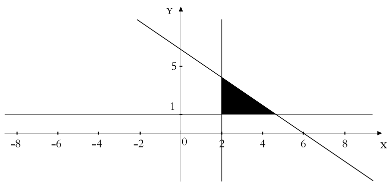
Mínimo: x = 0; y = 10; N = −20.



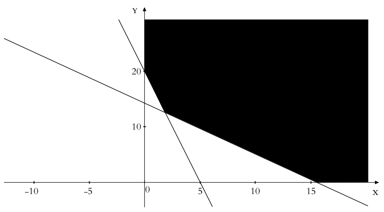
9. Debe ingerir 2 paquetes del alimento 1 y 15 paquetes del alimento 2. El costo será de $5.



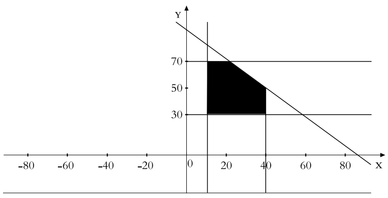
10. Deberán publicitar 5 horas 15 minutos en televisión abierta y 1 hora en televisión por cable. Llegarán a aproximadamente 710.000 personas.



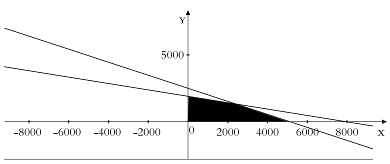
11. Se debe adquirir $\frac{4}{3}$ de unidad de cereal Rico y $\frac{44}{3}$ de unidad de cereal Nutritivo. El costo mínimo es de $13,33.



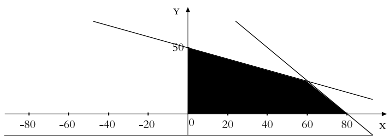
12. Deberá vender 40 palitos y 50 cucuruchos. La ganancia máxima será $57,5.



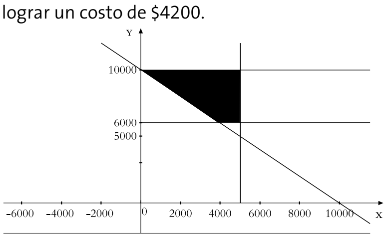
13. Le conviene fabricar 1333 baterías de cocina de lujo y 2666 económicas para ganar $159.960.



14. Debe fabricar 50 sacos y ningún pantalón para ganar $150.



15. Debe enviar 4000 litros del depósito de la ciudad y 6000 litros de la ciudad vecina para lograr un costo de $4200.



Capítulo 4

p | **85**

1. $\frac{56-29}{2-1} = 27;\ \frac{81-56}{3-2} = 25 \Rightarrow$ no es lineal.

2. **a.**

Cant. de horas (x)	0	1	2	3	4	5
Cant. de bacterias	8	16	32	64	128	256

No es lineal.

b.

Largo (cm)	10	20	25	40	45	48
Alto (cm)	40	30	15	10	5	2

Es lineal.

c.

Base (cm)	10	20	25	40	50	100
Altura (cm)	20	10	8	5	4	2

No es lineal.

p | **86**

3. Imagen = (0; 225]. No es inyectiva.

4. La **a.** y la **c.**

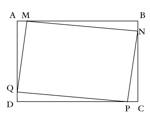
5. (−56; 8)

6. Sí, pues $\frac{[100 + (-100)]}{2} = 0$.

7. No, pues $\frac{235 - 244}{2} \neq 239{,}5$.

p | **87**

8.



$\overline{AB} = \overline{DC}$ por propiedad del rectángulo.
$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$ y $\overline{DP} + \overline{PC} = \overline{DC}$.
Como $\overline{PC} = \overline{AM}$, por requerimiento del problema $\Rightarrow \overline{MB} = \overline{DP}$.

Como $\overset{\triangle}{MBN}$ y $\overset{\triangle}{QDP}$ son rectángulos y tienen 2 lados iguales, $\overset{\triangle}{MBN} = \overset{\triangle}{QDP} \Rightarrow \overline{QP} = \overline{MN}$ (1)
$\overline{AD} = \overline{BC}$, por propiedad del rectángulo.
$\overline{AQ} + \overline{QD} = \overline{AD}$ y $\overline{BN} + \overline{NC} = \overline{BC}$.
Como $\overline{BN} = \overline{QD}$, por requerimiento del problema $\Rightarrow \overline{AQ} = \overline{NC}$.

Como $\overset{\triangle}{AMQ}$ y $\overset{\triangle}{PNC}$ son rectángulos y tienen 2 lados iguales, $\overset{\triangle}{AMQ} = \overset{\triangle}{PNC} \Rightarrow \overline{NP} = \overline{MQ}$ (2)

De (1) y (2): MNQP tiene 2 pares de lados opuestos congruentes; por lo tanto, es un paralelogramo.

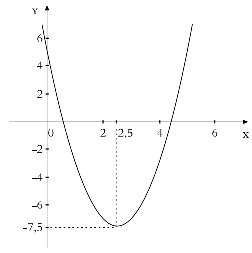
9. Cualquier punto de coordenadas (101,5; y), con y ≠ 8.

10. Sí, pues $\frac{-3+11}{2} = 4$ y $\frac{15-7}{2} = 4$.

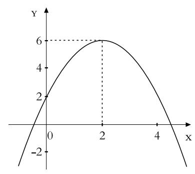
11. (40; 20) y (−60; 0)

p | **88**

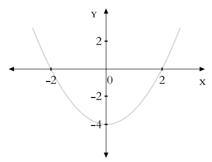
12. **a.** V = (2,5; −7,5). Dos pares de valores simétricos pueden ser (0; 5) y (5; 5); (2; −7) y (3; −7).



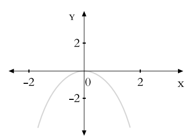
b. V = (2; 6). Dos pares de valores simétricos pueden ser (0; 2) y (4; 2); (1; 5) y (3; 5).



c. V = (0; −4). Dos pares de valores simétricos pueden ser (1; −3) y (−1; −3); (2; 0) y (−2; 0).



d. V = (0; 0). Dos pares de valores simétricos pueden ser (1; −3) y (−1; −3); (2; −12) y (−2; −12).



13. Largo = 100 m; ancho = 50 m.

p | **90**

14. Base = $\dfrac{40}{12+\pi}$; altura = $\dfrac{45}{12+\pi}$;

área = $\dfrac{2700+225\,.\,\pi}{2\,(12+\pi)^2}$.

15. **a.** En abril de 2001.
b. 2700
c. 2025
d. Sí, en octubre de 2003.

p | **91**

16. **a.** $x = 5$ ó $x = \dfrac{1}{12}$ **b.** $x = \dfrac{1}{3}$ ó $x = 2$

c. $x = \dfrac{-1+\sqrt{73}}{-6}$ ó $x = \dfrac{-1-\sqrt{73}}{-6}$

17. 3, 4 y 5.

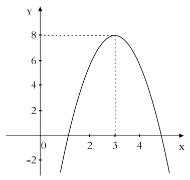
18. $y_v = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c =$

$= a\left(\dfrac{b^2}{4a^2}\right) - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = -\dfrac{b^2}{4a} + c$

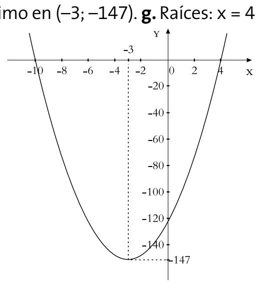
19. $\dfrac{5}{7}$

p | **92**

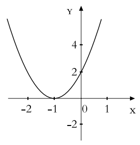
20. **I. a.** Vértice = (3; 8). **b.** Es cóncava hacia abajo. **c.** Dos pares de valores simétricos son, por ejemplo, (0; –10) y (6; –10); (2; 6) y (4; 6). **d.** Imagen = (–∞; 8]. **e.** Crece en (–∞; 3); decrece en (3; +∞). **f.** Tiene un máximo en (3; 8). **g.** Raíces: x = 1 y x = 5.



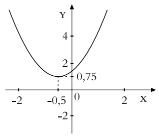
II. a. Vértice = (–3; –147). **b.** Es cóncava hacia arriba. **c.** Dos pares de valores simétricos son, por ejemplo, (0; –120) y (–6; –120); (–2; –144) y (–4; –144). **d.** Imagen = [–147; +∞). **e.** Crece en (–3; +∞); decrece en (–∞; –3). **f.** Tiene un mínimo en (–3; –147). **g.** Raíces: x = 4 y x = –10.



III. a. Vértice = (–1; 0). **b.** Es cóncava hacia arriba. **c.** Dos pares de valores simétricos son, por ejemplo, (0; 2) y (–2; 2); (1; 8) y (–3; 8). **d.** Imagen = [0; +∞). **e.** Crece en (–1; +∞); decrece en (–∞; –1). **f.** Tiene un mínimo en (–1; 0). **g.** Raíz: x = –1.

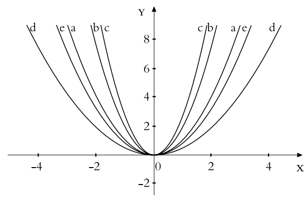


IV. a. Vértice = (–0,5; 0,75). **b.** Es cóncava hacia arriba. **c.** Dos pares de valores simétricos son, por ejemplo, (0; 1) y (–1; 1); (1; 3) y (–2; 3). **d.** Imagen = [0,75; +∞). **e.** Crece en (–0,5; +∞); decrece en (–∞; –0,5). **f.** Tiene un mínimo en (–0,5; 0,75). **g.** No tiene raíces reales.



p | **93**

21.



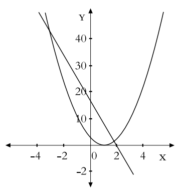
Si y = a . x^2, con a > 0, cuanto mayor es **a**, más se acerca la gráfica al eje **y**.

22. e < a < c; d < b < f.

p | **94**

23. Se encuentran, aproximadamente, a las 1,69 horas y 88,3 horas.

24. **a.**

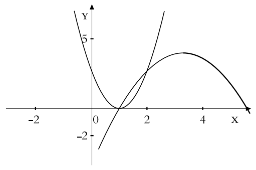


Puntos de intersección:

$\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\,;\,22{,}5-\dfrac{9}{2}\,.\,\sqrt{21}\right)$ y

$\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\,;\,22{,}5+\dfrac{9}{2}\,.\,\sqrt{21}\right)$.

b.



Puntos de intersección: (2; 3) y (1; 0).

p | **95**

25. **a.** $h < \dfrac{1}{27}$ **b.** $h > \dfrac{11}{12}$

c. $h \in \left(\dfrac{-5-\sqrt{139}}{4}\,;\,\dfrac{-5+\sqrt{139}}{4}\right)$

26. Hay dos rectas tangentes: y = 7x – 15; y = –9x + 1.

27. y = 4x – 1

p | **96**

28. Si el lado del cuadrado mide menos de $-1+\sqrt{5}$, conviene en lo de don Mario; en caso contrario, en lo de don Manuel.

29. El violeta tarda aproximadamente 16,3 segundos y el anaranjado, aproximadamente, 16,68 segundos.

p | **97**

30. El primer artesano nunca gana más que el segundo, en 3 docenas ganan lo mismo.

31. **a.** $x \in (-\infty\,;\,1) \cup (3;+\infty)$ **d.** $S = \phi$
b. $x \in (-9;-1)$ **e.** $S = \phi$
c. $x \in \left(1;\ \dfrac{37}{6}\right)$

p | **98**

32. Una respuesta posible es $y = -3(x+1)^2 + 5$. Hay infinitas.

33. $y = -\dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{13}{3}$. Hay una única función.

34. Una respuesta posible es y = –3(x – 2)(x – 5). Hay infinitas.

35. $y = \dfrac{5}{4}(x-2)(x-5)$. Hay una única función.

36. $y = -\dfrac{5}{32}x^2 + \dfrac{5}{4}x + \dfrac{65}{8}$. Hay una única función.

p | **99**

37. **a.** 121,5 **b.** 504

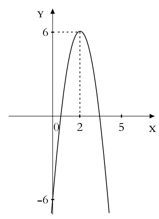
p | **100**

38. $\dfrac{169}{6}$

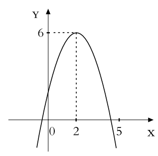
Guía de ejercitación

1. **a.** No, es lineal. **b.** Es cuadrática.

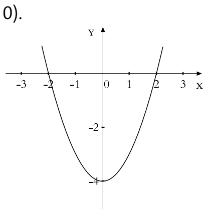
2. **a.** V = (2; 6). Dos pares de valores simétricos pueden ser, por ejemplo, (0; –6) y (4; –6); (1; 3) y (3; 3).



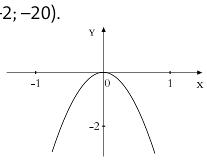
b. V = (2; 6). Dos pares de valores simétricos pueden ser, por ejemplo, (0; 2) y (4; 2); (1; 5) y (3; 5).



c. V = (0; –4). Dos pares de valores simétricos pueden ser, por ejemplo, (1; –3) y (–1; –3); (2; 0) y (–2; 0).



d. V = (0; 0). Dos pares de valores simétricos pueden ser, por ejemplo, (1; –5) y (–1; –5); (2; –20) y (–2; –20).



3. En el de la izquierda: $y = \frac{5}{4}(x-4)^2$.

En el de la derecha: $y = -(x+3)^2 + 4$.

4. En la primera hora, v = 35 km/h; en la segunda hora, v = 45 km/h.

5. Para el camión, a = 10 km/h^2 ; para el auto, a = 0 km/ h^2.

6. Si la moto sale de Buenos Aires, se encuentra con el camión a las 6,74 hs. aproximadamente y no se encuentra con el auto.

7. **a.** El 31 de marzo. **b.** 12.500 abejas. **c.** 12.375 abejas. **d.** A los 80 días, el 20 de mayo.

8. Largo = $\frac{125}{3}$ m; ancho = 50 m.

9. Largo = 200 m; ancho = 150 m.

10. **a.** v = 374,5 m/s; t = 13,5 segundos.
b. Después de 27,184 segundos.
c. v = 350 m/s a los 10 segundos y a los 17 segundos.
La velocidad nunca es de 400 m/s.

11. **a.** 15 artículos.
b. 14,8 artículos.

12. **a.** 90 km/h
b. 270 km/l
c. Sí; v = 90 km/h.
d. Entre 0 km/h y 90 km/h.

13. **a.** (1; 6) y $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ **b.** (3,8; 7,68) y (–3; 24)

14. Como máximo, 2.

15. Pueden tener dos soluciones, ninguna o infinitas.

16. **a.** $x = 0$ ó $x = -\frac{1}{2}$ **c.** $x = \frac{5}{12}$ ó $x = 2$

b. x = 3 ó x = 1

17. **a.** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(2; +\infty\right)$

b. $x \in \left(-\infty; \frac{61-\sqrt{3193}}{24}\right) \cup \left(\frac{61+\sqrt{3193}}{24}; +\infty\right)$

18. Para k ≥ – 2.

19. Para k > 7,5.

20. El producto máximo es 56,25.

21. 18 y 15 ó –15 y –18.

22. 57 y 59 ó –59 y –57.

23. 6 km/h.

Capítulo 1

p | **14**

1. **a.** 0,35 m^3 **c.** $f(x) = x^2 \cdot \left(\frac{x}{4} + 0{,}10\right)$
b. 12,96 m^3

p | **15**

2. $y = 2^4 \cdot x$

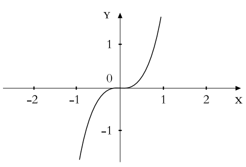
3. **a.** Es un polinomio: el grado es 2, el coeficiente principal es 8 y el término independiente es –2.
b. Es un polinomio: no tiene grado, el coeficiente principal es 0 y el término independiente es 0.
c. No es un polinomio porque el exponente de **x** es $-1 \in \mathbb{Z}^-$.
d. Es un polinomio: el grado es 0, el coeficiente principal es 3 y el término independiente es 3.
e. Es un polinomio: el grado es 4, el coeficiente principal es 8 y el término independiente es –5.
f. No es un polinomio porque en uno de los términos el exponente de **x** no es natural.
g. No es un polinomio porque el exponente de **x** es una fracción.

4. **a.** $S = \left\{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right\}$ **b.** $S = \{3; -5; 1\}$ **c.** $S = \{0; 6\}$

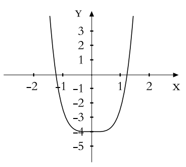
5. Problema 1: Es un polinomio. El grado es 3, el coeficiente principal es $\frac{\pi}{16}$ y el término independiente es 0.
Problema 2: Es un polinomio. El grado es 3, el coeficiente principal es 50 y el término independiente es 100.

p | **16**

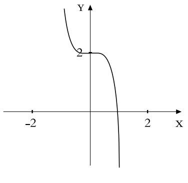
6. **a.** Dom G = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = 0$; cero: $x = 0$; $C^+ = (0; +\infty)$; $C^- = (-\infty; 0)$.



b. Dom R = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = -4$; ceros: $x = \sqrt[6]{4}$ y $x = -\sqrt[6]{4}$;
$C^+ = (-\infty; -\sqrt[6]{4}) \cup (\sqrt[6]{4}; +\infty)$; $C^- = (-\sqrt[6]{4}; \sqrt[6]{4})$.



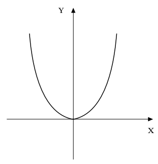
c. Dom H = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = 2$; cero: $x = \sqrt[9]{2}$; $C^+ = (-\infty; \sqrt[9]{2})$; $C^- = (\sqrt[9]{2}; +\infty)$.



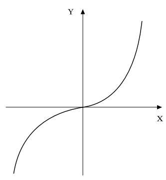
p | **17**

7. $f(x) = x^n$, n par:
Dom f = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = 0$; cero: $x = 0$; $C^+ = \mathbb{R} - \{0\}$; $C^- = \phi$; intervalo de crecimiento = $(0; +\infty)$; intervalo de decrecimiento = $(-\infty; 0)$; Im f = $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
$f(x) = x^n$, n impar:
Dom f = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = 0$; cero: $x = 0$; $C^+ = (0; +\infty)$; $C^- = (-\infty; 0)$; intervalo de crecimiento = $\mathbb{R}$; intervalo de decrecimiento = ϕ; Imagen f(x) = $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^n$, n par



$f(x) = x^n$, n impar



p | **18**

8. $f(x) = ax^n + b$, n par:
Dom f = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = b$; no tiene ceros; $C^+ = \mathbb{R}$; $C^- = \phi$; intervalo de crecimiento = $(0; +\infty)$; intervalo de decrecimiento = $(-\infty; 0)$; Im f = $[b; +\infty)$.

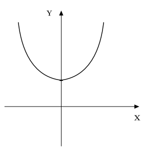
$f(x) = ax^n + b$, n impar:
Dom f = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = b$;

cero: $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$; $C^+ = \left(\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}; +\infty\right)$;

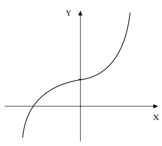
$C^- = \left(-\infty; \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}\right)$; intervalo de crecimiento = $\mathbb{R}$;

intervalo de decrecimiento = ϕ; Im f = $\mathbb{R}$.

$f(x) = a \cdot x^n + b$, n par



$f(x) = a \cdot x^n + b$, n impar



p | **19**

9. **a.** $P(x) + Q(x) = $
$= 8x^7 - \frac{25}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x + 8$
b. $2P(x) - 9Q(x) = -55x^8 - 6x^7 + 53{,}5\,x^5 - 6x^4 +$
$+ 79x^3 - 126x^2 + 38x - 105$

10. **a.** No existen **a** y **b** que verifiquen las condiciones pedidas.
b. No existen **a** y **b** que verifiquen las condiciones pedidas.

p | **20**

11. **a.** $W(x) = -10x^8 + 100x^7 - 155x^6 + 70x^5 + 105x^4 -$
$- 120x^3 - 95x^2 - 30x + 75$
b. $Z(x) = x^8 - 16x^7 + 60x^6 + 32x^5 + 10x^4 -$
$- 48x^3 - 12x^2 + 9$
c. $M(x) = -2x^8 - 5x^7 + x^6 + 9x^5 + 18x^4 - 44x^3 -$
$- 23x^2 - 30x + 56$

12. **a.** $gr[A(x) - B(x)] \le 5$
b. $gr[A(x) \cdot B(x) + C(x)] = 10$
c. $5 \le gr[(A(x) - B(x)) \cdot C(x)] \le 10$

p | **21**

13. **a.** a = 2 y b = 10 **c.** No existen **a** y **b** que verifiquen las condiciones pedidas.
b. a = 4 y b = –1

14. $gr[P(x)] = 2$

15. $P(x) = x^2 - 2x + 1$

p | **23**

16. $P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 5x^3 + 17x^2 - 29x + 10$

17. **a.** Cociente $C(x) = x^2$; resto $R(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$.
b. Cociente $C(x) = 1$; resto $R(x) = -14$.

18. **a.** Resto = 56751
b. Resto = –1796860

p | **26**

19. **a.** Cociente $C(x) = 5x^2 - 28x + 142$; resto $R(x) = -711$.
b. Cociente $C(x) = 5x^2 + 27x + 164$; resto $R(x) = 983$.

20. **a.** $x = \frac{1}{2}$ **c.** $x = \frac{2}{3}$ ó $x = \frac{1}{4}$ ó $x = \frac{1}{5}$
b. $x = 2$ ó $x = -2$

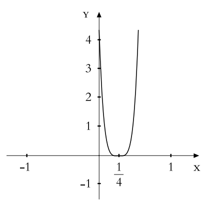
p | **27**

21. **a.** $F(x) = -24 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$

b. $R(x) = 81 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{4}{9}\right)$

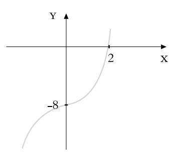
c. $T(x) = -3x \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x^2 + 4) \cdot (x + 1)$

22. $P(x) = 1280 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^4$



p | **29**

23. **a.** Dom F = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = -8$; raíz: $x = 2$; $C^+ = (2; +\infty)$; $C^- = (-\infty; 2)$.

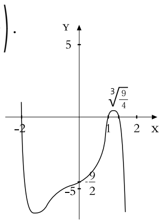


b. Dom Z = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = -\frac{9}{2}$;

raíces: $x = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$; $x = -2$; $x = 1$;

$C^+ = (-\infty\,; -2) \cup \left(1;\ \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$;

$C^- = (-2; 1) \cup \left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\,; +\infty\right)$.

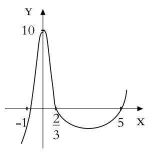


c. Dom H = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = 10$;

raíces: $x = \frac{2}{3}$; $x = -\frac{1}{4}$; $x = 5$;

$C^+ = \left(-\frac{1}{4}\,; \frac{2}{3}\right) \cup (5; +\infty)$;

$C^- = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\,; 5\right)$.



p | **30**

24. **a.** $P(x) = k\,.\,(x-2)^m\,.\,(x+3)^n\,.\,(x-4)^p$, $k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$; $m, n, p \in \mathbb{N}$; $m + n + p = 9$.
b. No, hay infinitas.

25. Sí, pues f(0) = 2 y f(1) = 5 (aplicando el Teorema de Cauchy).

26. Gráfico 1: Hay infinitas,
$f(x) = k\,.\,(x+20)^2\,.\,(x-20)^2$, con $k > 0$.

Gráfico 2: $f(x) = -\frac{1}{2000}\,.\,(x+10)^2\,.\,(x-10)^2$.

Gráfico 3: Hay infinitas.

$f(x) = k\,.\,(x+3)^2\,.\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.\,(x-3)$, con $k > 0$.

Guía de ejercitación

1. **a.** $P(-5) = -25423$
b. $Q(-1) = 2$
c. $S(x) = 7x^5 - 6x^4 + 48x^3 + 8x^2 - 24x + 10$
d. $R(x) = -42x^8 + 36x^7 + 21x^6 - 66x^5 + 60x^3 - 18x + 8$

2. **a.** $S(x) = -5x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x$
b. $T(x) = -25x^4 + 5x^3 + 12x^2 - 6x - 5$
c. $[P(x) - Q(x)]\,.\,R(x) = -100x^8 + 60x^7 + 31x^6 - 32x^5 - 39x^4 + 7x^3 + 28x^2 - 15x$
d. $[P(x) + R(x)]^2\,.\,Q(x) = 125x^{12} + 75x^{11} + 165x^{10} - 139x^9 + 551x^8 + 162x^7 + 457x^6 - 440x^5 + 768x^4 + 200x^3 + 280x^2 - 400x + 500$

3. $P(x) = 2x^4 + \frac{2}{3}x^2 - 1$

4. No, pues $gr[P(x)]^2 = 2\,.\,gr[P(x)]$; por lo tanto, $gr[P(x)]^2$ tiene que ser par.

5. $K(x) = 2x^4 + \frac{10}{3}$

6. $Q(x) = \frac{6}{5}$

7. No existe.

8. **a.** $b = -1$; $a = -1$ **b.** $a = -3$; $\forall\, b \neq 1$.

9. **a.** Cociente $C(x) = \frac{8}{3}\,.\,x^2$; resto $R(x) = 0$.
b. Cociente $C(x) = -2x^3 + \frac{9}{2}x$; resto $R(x) = 0$.
c. Cociente $C(x) = 0$; resto $R(x) = 6x^3$.
d. Cociente $C(x) = 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64$; resto $R(x) = -128$.

10. **a.** $a = -7$; $b = 2$. **b.** No es posible.

11. $gr[Q(x)] = 4$

12. $gr[P(x)] = 7$

13. $R(x) = -4x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

14. **a.** Cociente $C(x) = \frac{4}{3}$;
resto $R(x) = -3x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{1}{2}$.
b. Cociente $C(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 30x + 88$; resto $R(x) = 265$.

15. **a.** $m = -9$
b. $m = 392$
c. No tiene solución porque $P(-1) = 1$

16. $a = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ó $a = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

17. No, el resto de dividir P(x) por Q(x) es –25.

18. **a.** $a = -6$. **b.** $a = -9$

19. $k = -\frac{25}{124}$

20. **a.** $M(x) = 3x^2 - 3$
b. No existe M(x) que verifique dichas condiciones.

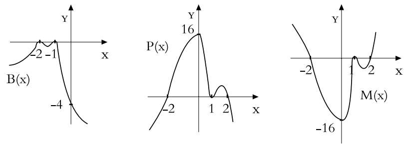
21. $A(x) = k\,.\,B(x)$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

22. Si n es par: P(x) es divisible por (x – a) y por (x + a). Q(x) no es divisible por (x – a) ni por (x + a).
Si n es impar, P(x) es divisible por (x – a). Q(x) es divisible por (x + a).

23. $k = 4$.

24. **a.** $Q(x) = 3(x+1)\,.\left(x - \frac{1}{3}\right).\,(x^2 + 4)$
b. $F(x) = -2\,.\,(x-5)\,.\,(x-3)\,.\,(x+1)$

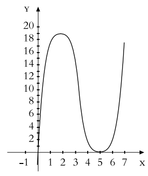
25. Dom B = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = -4$; raíces: $x = -2$ de multiplicidad 2, $x = -1$ de multiplicidad 2; $C^+ = \phi$;
$C^- = (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$.
Dom P = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = 16$; raíces: $x = -2$ de multiplicidad 3; $x = 1$ de multiplicidad 2; $x = 2$;
$C^+ = (-2; 1) \cup (1; 2)$; $C^- = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
Dom M = $\mathbb{R}$; ordenada al origen: $y = -16$; raíces: $x = 2$ de multiplicidad 3; $x = 1$ de multiplicidad 2; $x = -2$;
$C^+ = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $C^- = (-2; 1) \cup (1; 2)$.



26. **a.** Falso, pues P(x) es de grado impar, por lo tanto una de las raíces debe ser real.
b. Falso, pues, por ejemplo, $P(x) = x^6 + 1$ no tiene raíces reales.
c. Falso, tiene 2 raíces reales: $x = \sqrt[6]{\frac{8}{5}}$; $x = -\sqrt[6]{\frac{8}{5}}$

27. Sí.

28. **a.** Altura = 12 m
b.

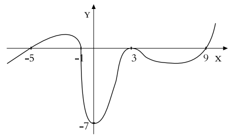


c. Dominio = $\mathbb{R}^+$ **d.** Sí, pues f(2) = 18.

29. **a.** Hay infinitas, $f(x) = a\,.\,x^n.\,(x-1)^m\,.\,(x-2)^p$, con $a > 0$, $n, m, p \in \mathbb{N}$, n par y m, p impares.
b. Hay infinitas, $f(x) = a\,.\,x^n\,.\,(x-1)^m\,.\,(x-2)^p$, con $a > 0$, $n, m, p \in \mathbb{N}$, n, m pares y p impar.

30. Hay muchas opciones; una de ellas es:
$F(x) = -\frac{1}{40}\,.\,(x+4)\,.\,(x-2)^3\,.\,(x-3)^2$

31. Hay muchas; una posibilidad es:
$F(x) = \frac{7}{405}\,.\,(x+5)\,.\,(x+1)^7.\,(x-3)^2\,.\,(x-9)$



32. Hay muchas; una posibilidad es:
$F(x) = \frac{1}{242}\,.\,(x-5)\,.\,(x+2)^2.\ (x-8)^{10}$

Capítulo 2

p | **41**

1. **a.**

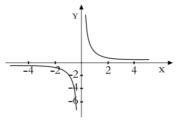
CAPACIDAD DE LOS ENVASES	CANTIDAD DE ENVASES QUE PUEDEN LLENARSE
1	90.000
0,5	180.000
0,25	360.000
2	45.000
2,25	40.000

b. $f(x) = \frac{90.000}{x}$ donde **x** es la capacidad de cada envase en litros y f(x) es el número de envases.

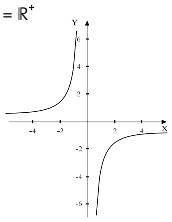
c. 22,5 litros.

p | **42**

2. **a.** Dom $f_1 = \mathbb{R} - \{0\}$; Im $f_1 = \mathbb{R} - \{0\}$; $C^+ = \mathbb{R}^+$; $C^- = \mathbb{R}^-$



b. Dom $f_2 = \mathbb{R} - \{0\}$; Im $f_2 = \mathbb{R} - \{0\}$;
$C^+ = \mathbb{R}^-$; $C^- = \mathbb{R}^+$



p | **45**

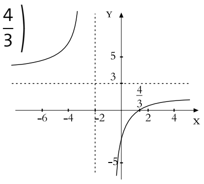
3. **a.** $x \in (-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$
b. $x \in (-\infty; -2)$
c. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

4. Los puntos son $(1; 1)$ y $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$.

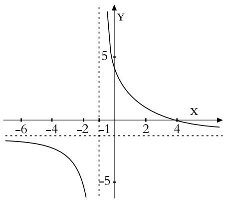
p |**46**

5. **a.** $y = \frac{1}{x} + 2$ **b.** $y = \frac{-1}{x+3} - 1$ **c.** $y = \frac{2}{x-5}$

6. **I. a.** Dom $f_1 = \mathbb{R} - \{-2\}$; Im $f_1 = \mathbb{R} - \{3\}$.
b. Asíntotas: $y = 3$; $x = -2$.
c. Raíz: $x = \frac{4}{3}$. $C^+ = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$;
$C^- = \left(-2; \frac{4}{3}\right)$



II. a. Dom $f_2 = \mathbb{R} - \{-1\}$; Im $f_1 = \mathbb{R} - \{-1\}$.
b. Asíntotas: $y = -1$; $x = -1$.
c. Raíz: $x = 4$; $C^+ = (-1; 4)$; $C^- = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.



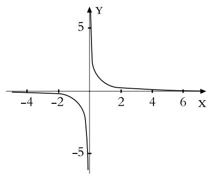
Guía de ejercitación

1. **a.**

VOLUMEN	DENSIDAD
0,01 cm^3	10 g/cm^3
100 cm^3	0,001 g/cm^3
0,000001666 cm^3	60 kg/cm^3
10 cm^3	0,01 g/cm^3

b. $D = \frac{0{,}1}{v}$, donde **d** está en g/cm^3 y **v**, en cm^3.

c.



2. **a.**

VELOCIDAD (km/h)	TIEMPO QUE TARDA EN REALIZAR EL VIAJE (HORAS)
50	16
40	20
100	8
120	6,$\widehat{6}$
150	5,$\widehat{3}$

b. $t = \frac{800}{v}$, **t** en horas y **v** en km/h.

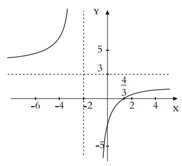
3. **a.** Por ejemplo: $\frac{-2x+3}{x-1}$ **b.** Por ejemplo: $\frac{x-4}{x+2}$

4. **f_1: a.** Dom $f_1 = \mathbb{R} - \{-2\}$; Im $f_1 = \mathbb{R} - \{3\}$.
Asíntotas: $y = 3$; $x = -2$.

b. Raíz: $x = \frac{4}{3}$. Ordenada al origen: $y = -2$.

c. $C^+ = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$; $C^- = \left(-2; \frac{4}{3}\right)$.

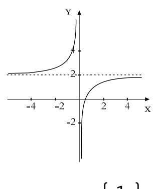
Crece en $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; no decrece nunca.



f_2: a. Dom $f_2 = \mathbb{R} - \{0\}$; Im $f_2 = \mathbb{R} - \{2\}$.
Asíntotas: $y = 2$; $x = 0$.
b. Raíz: $x = \frac{1}{2}$. No tiene ordenada al origen.

c. $C^+ = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; $C^- = \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Crece en $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; no decrece nunca.

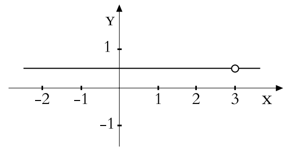


f_3: a. Dom $f_3 = \mathbb{R} - \{3\}$; Im $f_3 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

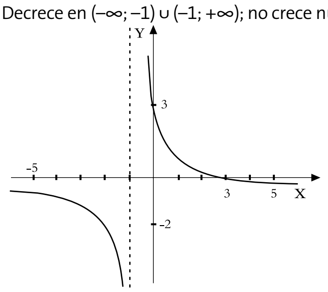
No tiene asíntotas.

b. No tiene raíces. Ordenada al origen: $y = \frac{1}{2}$.

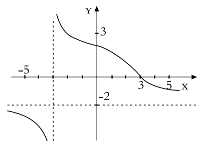
c. $C^+ = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; $C^- = \phi$. Es constante.



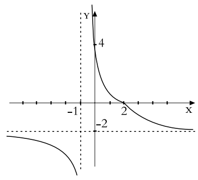
f_4: a. Dom $f_4 = \mathbb{R} - \{-1\}$;
Im $f_4 = \mathbb{R} - \{-1\}$. Asíntotas: $y = -1$; $x = -1$.
b. Raíz: $x = 3$. Ordenada al origen: $y = 3$.
c. $C^+ = (-1; 3)$; $C^- = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
Decrece en $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; no crece nunca.



f_5: a. Dom $f_5 = \mathbb{R} - \{-3\}$;
Im $f_5 = \mathbb{R} - \{-2\}$. Asíntotas: $y = -2$; $x = -3$.
b. Raíz: $x = 3$. Ordenada al origen: $y = 2$.
c. $C^+ = (-3; 3)$; $C^- = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
Decrece en $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; no crece nunca.



f_6: a. Dom $f_6 = \mathbb{R} - \{-1\}$;
Im $f_6 = \mathbb{R} - \{-2\}$. Asíntotas: $y = -2$; $x = -1$.
b. Raíz: $x = 2$. Ordenada al origen: $y = 4$.
c. $C^+ = (-1; 2)$; $C^- = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
Decrece en $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; no crece nunca.



5. **a.** $y = \frac{-6}{x+8} + 1 = \frac{x+2}{x+8}$

b. $y = \frac{0{,}5}{x-2} - 0{,}5 = \frac{-x+3}{2x-4}$

c. $y = \frac{1{,}5}{x+3} - 0{,}5 = \frac{-x}{2x+6}$

d. $y = \frac{-1}{x+3}$

6. **a.** $a = 2c$; $d = -3c$ **c.** $a = 4c$; $b = 0$; $d = 5c$
b. $d = 3c$; $b = 2a$

7. **a.** (1; 3) y $\left(-\frac{4}{7}\ ;-\frac{2}{3}\right)$ **c.** No existe.

b. $\left(2\ ;-\frac{1}{2}\right)$

d. $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\ ;\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$ y $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ ;\ \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$

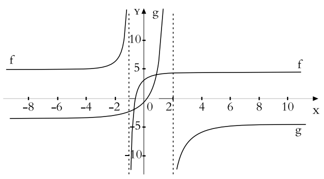
8. **a.** (1; 2] **e.** $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$

b. (0; 1) **f.** $\left(-\infty;\ \frac{11}{8}\right) \cup (2; +\infty)$

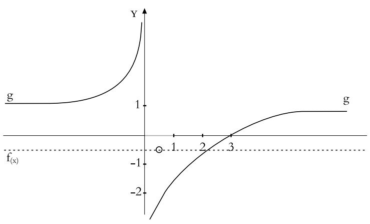
c. Ningún valor de x. **g.** (–1; 1)

d. (–∞; 0) **h.** $\left(-\infty; -\frac{11}{3}\right) \cup (-2; +\infty)$

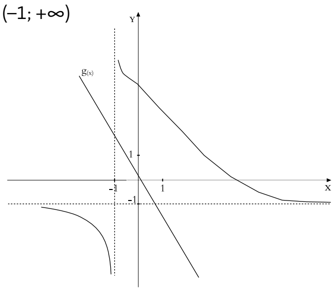
9. **a.** $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{4}{7}\ ; 1\right) \cup (2; +\infty)$



b. $\left(0;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}\ ; 2\right)$



c. (–1; +∞)



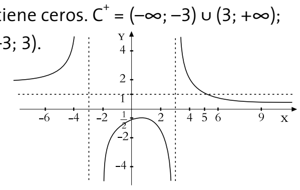
10. **a.** $\mathbb{R} - \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$ **b.** $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$

11. **I. a.** Dom f = $\mathbb{R}$ – {3; –3};

Im f = $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\ ; +\infty\right)$.

b. Asíntotas: y = 1; x = –3; x = 3.

c. No tiene ceros. $C^+ = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; $C^- = (-3; 3)$.

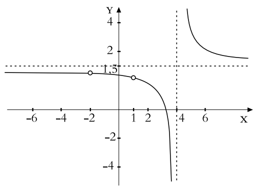


II. a. Dom g = $\mathbb{R}$ – {1; –2; 4}; Im g = $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b. Asíntotas: $y = \frac{3}{2}$; x = 4.

c. Cero: x = 3. $C^- = (3; 4)$;

$C^+ = (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$.



Capítulo 3

p | **59**

1. No; no es lineal pues en las horas, el incremento es siempre 1 y en la masa, el primer incremento es 7,5 y el segundo, 8,625.

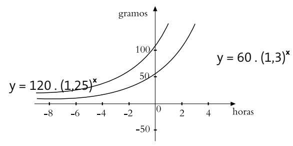
p | **60**

2. Son verdaderas **a.**, **c.** y **d.**

p | **61**

3. Al cabo de 1 hora, habrá 150 g; al cabo de 2 horas, habrá 187,5 g; al cabo de 3 horas, habrá 234,375 g; en **t** horas, habrá $120 \cdot (1{,}25)^t$.

4.



5. Si $y = a \cdot b^x$, la ordenada al origen es **a**. Como b > 1, las funciones son crecientes y tienen una asíntota horizontal a izquierda en y = 0.

p | **62**

6. **a.** $y = 15 \cdot (0{,}5)^t$, con **t** medido en años a partir de 1950.

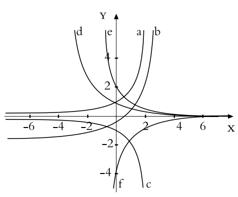
b. 0,00000000000000166533454 kg.

7. $563,41

8. **a.** Imagen = $\mathbb{R}^+$ **d.** Imagen = $\mathbb{R}^+$

b. Imagen = (–1; +∞) **e.** Imagen = $\mathbb{R}^+$

c. Imagen = $\mathbb{R}^-$ **f.** Imagen = $\mathbb{R}^-$



p | **63**

9. **a.** No existe, pues si $5 = k \cdot a^2 \Rightarrow k > 0$, pero si $-2 = k \cdot a^7 \Rightarrow k < 0$.

b. $y = 2 \cdot (1{,}5)^x$

c. No existe, pues las funciones exponenciales son siempre crecientes o siempre decrecientes.

10. 7,4337071%

11. 300,032 gramos.

p | **65**

12. **a.** $\log_a a = 1$ **g.** $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$

b. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ **h.** $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

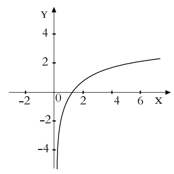
c. $\log_a 1 = 0$ **i.** $\log_3 3 = 1$

d. $\log_{10} 100 = 2$ **j.** $\log_5 125 = 3$

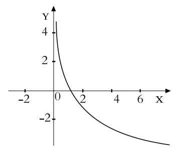
e. $\log_{10} 1000 = 3$ **k.** $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

f. $\log_{10} 0{,}1 = -1$

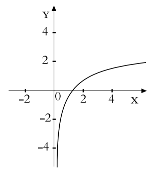
13. **a.** Dom $f_1 = \mathbb{R}^+$; Im $f_1 = \mathbb{R}$; ceros: x = 1; $C^+ = (1; +\infty)$; $C^- = (0; 1)$.



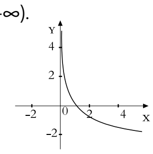
b. Dom $f_2 = \mathbb{R}^+$; Im $f_2 = \mathbb{R}$; ceros: x = 1 ; $C^+ = (0; 1)$; $C^+ = (1; +\infty)$.



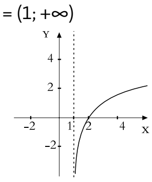
c. Dom $f_3 = \mathbb{R}^+$; Im $f_3 = \mathbb{R}$; ceros: x = 1; $C^+ = (1; +\infty)$; $C^- = (0; 1)$.



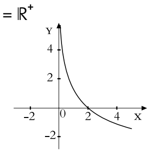
d. Dom $f_4 = \mathbb{R}^+$; Im $f_4 = \mathbb{R}$; ceros: x = 1; $C^+ = (0; 1)$; $C^- = (1; +\infty)$.



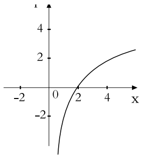
14. **a.** Dom f = (1; +∞)



b. Dom f = $\mathbb{R}^+$



c. Dom f = $\mathbb{R}^+$



p **| 66**

15. **a.** $\log_6 216 = 3$ **d.** $\log \frac{1}{100} = -2$

b. $10^3 = 1000$ **e.** $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

c. $4^{\frac{5}{2}} = 32$

16. –24,9288

17. 21,18

p **| 68**

18. **a.** 500 gramos.

b. $y = 500 \,.\, 0{,}98853574^x$, **x** en horas; **y** en kg.

c. $5{,}83 \,.\, 10^{-20}$ kg

d. Por día: 24,1742%; por semana: 85,588%; por mes: 99,975%; por hora: 1,146426%.

e. 4 días 8 horas 25 minutos.

p **| 69**

19. **a.** 4,5538 segundos.

b. $1{,}74.\ 10^{-37}$ kg

20. Capital = \$463,31; tasa = 22,918%.

21. 31 horas 3 minutos 46,21 segundos.

p **|70**

22. **a.** $x = \frac{11}{7}$ **b.** $x = \frac{14}{9}$

c. x = 1,917819203 ó x = –2,96563

d. $x = \frac{101}{75}$

e. x = 1

f. $x = \frac{5 + \sqrt{57}}{8}$ ó $x = \frac{5 - \sqrt{57}}{8}$

g. No tiene solución.

h. x = 18

i. x = –1296

j. x = 1161

p **| 72**

23. **a.** x = 1,01025 ó x = 3,375

b. x = –0,655 ó x = 1,2555

Guía de ejercitación

1. **c.** y **b.** son iguales a $2^8 \,.\, 3$.

2. **a.** $y = 1{,}36281752 \,.\, 1{,}567619048^x$

b. No existe.

c. No existe.

d. $y = -231 \,.\, 2{,}386277902^x$

3. Si k > 0

a. Dom = $\mathbb{R}$; Im = $\mathbb{R}^+$.

b. Si a > 1, la función es creciente, y si 0 < a < 1, la función es decreciente.

Ceros: no tiene; $C^+ = \mathbb{R}$; $C^- = \phi$.

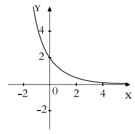
Si k < 0

a. Dom = $\mathbb{R}$; Im = $\mathbb{R}^-$.

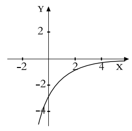
b. Si a > 1, la función es decreciente, y si 0 < a < 1, la función es creciente.

Ceros: no tiene; $C^+ =$ f; $C^- = \mathbb{R}$.

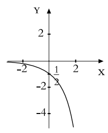
4. **a.** Dom f = $\mathbb{R}$; Im f = $\mathbb{R}^+$; ceros: no tiene; $C^+ = \mathbb{R}$; $C^- = \phi$. Asíntota: y = 0.



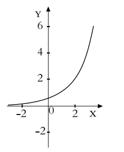
b. Dom g = $\mathbb{R}$; Im g = $\mathbb{R}^-$; ceros: no tiene; $C^+ = \phi$; $C^- = \mathbb{R}$. Asíntota: y = 0.



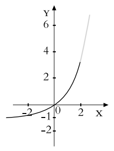
c. Dom h = $\mathbb{R}$; Im h = $\mathbb{R}^-$; ceros: no tiene; $C^+ = \phi$; $C^- = \mathbb{R}$. Asíntota: y = 0.



d. Dom f = $\mathbb{R}$; Im f = $\mathbb{R}^+$; ceros: no tiene; $C^+ = \mathbb{R}$; $C^- = \phi$. Asíntota: y = 0.



e. Dom f = $\mathbb{R}$; Im f = (–1; +∞); ceros: x = 0; $C^+ = \mathbb{R}^+$; $C^- = \mathbb{R}^-$. Asíntota: y = –1.



5. **a.** Por ejemplo: $y = 0{,}5^x$.

b. Por ejemplo: $y = -(0{,}5^x)$.

c. $y = -2^x$.

6. **a.** Dom f = $\mathbb{R}^+$; Im f = $\mathbb{R}$.

b. Ceros: x = 1; $C^+ = (1; +\infty)$; $C^- = (0; 1)$.

c. Intervalo de crecimiento = $\mathbb{R}^+$; intervalo de decrecimiento = ϕ.

7. **a.** Dom f = (0; +∞); Im f = $\mathbb{R}$.

b. Ceros: x = 1; $C^+ = (0; 1)$; $C^- = (1; +\infty)$.

c. Intervalo de crecimiento = ϕ; intervalo de decrecimiento = $\mathbb{R}^+$.

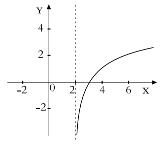
8. **a.** $\log_{0,2} 2$, porque la función $\log_{0,2} x$ es decreciente.

b. $\log_5 6$, porque la función $\log_5 x$ es creciente.

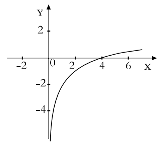
9. 4

10. $\frac{23}{6}$

11. **a.** Dom f = (2; +∞); Im f = $\mathbb{R}$; cero: x = 3; $C^+ = (3; +\infty)$; $C^- = (2; 3)$.

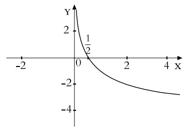


b. Dom f = $\mathbb{R}^+$; Im f = $\mathbb{R}$; cero: x = 4; $C^+ = (4; +\infty)$; $C^- = (0; 4)$.



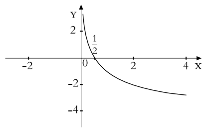
c. Dom f = $\mathbb{R}^+$; Im f = $\mathbb{R}$; cero: $x = \frac{1}{2}$;

$C^+ = \left(0; \frac{1}{2}\right)$; $C^- = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

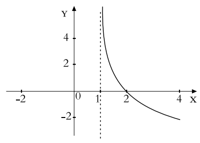


d. Dom f = $\mathbb{R}^+$; Im f = $\mathbb{R}$; cero: $x = \frac{1}{2}$;

$C^+ = \left(0; \frac{1}{2}\right)$; $C^- = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



e. Dom f = (1; +∞); Im f = $\mathbb{R}$; cero: x = 2; $C^+ = (1; 2)$; $C^- = (2; +\infty)$.



12. 50%

13. **a.** $y = 6{,}164456972 \,.\, 0{,}9996995942^x$, con **x** en días e **y** en kg.

b. Por día: 0,03%; por mes: 0,8973%; por semana: 0,21%; por minuto: 0,0000208%.

c. 6224 días 6 horas 55 minutos 47 segundos.

14. **a.** $y = 940{,}977 \,.\, 1{,}0012^x$, con **x** en días e **y** en gramos.

b. Por día: 0,12%; por hora: 0,005 %; por semana: 0,843%; por mes: 3,66335%.

c. Aproximadamente, 578 días.

15. **a.** $y = 15897{,}66 \,.\, 0{,}92^x$, con **x** en días e **y** en gramos.

b. 8,313 días.

c. Por día: 8%; por hora: 0,3468%; por semana: 44,21 %; por mes: 91,8%.

16. **a.** \$1200.

b. $y = 1200 \,.\, 1{,}021853^{x}$, con **x** en meses e **y** en pesos.
c. $2613,151
d. Por mes: 2,1853%; por semestre: 13,85 %; por semana: 0,542%.
e. Aproximadamente, 66 meses.

17. **a.** 12,3987 años.
b. Por año: 5,437%; por década: 42,82 %; por mes: 0,465 %.

18. **a.** $y = 3{,}5 \,.\, 0{,}962^{x}$, con **x** en meses e **y** en kg.
b. 68,12 meses.
c. Por mes: 3,8%; por año: 37,18 %; por década: 99,043%; por semana: 0,964%.

19. **a.** $y = 500 \,.\, 1{,}000623637^{x}$, con **x** en horas e **y** en gramos.
b. Aproximadamente, 1762,17 horas.
c. Por día: 1,5%; por mes: 56,6555 %; por año: 23441675%.

20. **a.** $x = 1{,}125431679$ ó $x = -1{,}58$
b. No tiene solución.
c. $x = 2{,}963891349$ ó $x = -0{,}0749226607$
d. $x = 1{,}767876219$
e. No tiene solución.
f. No tiene solución.
g. $x = \dfrac{1+\sqrt{65}}{2}$ ó $x = \dfrac{1-\sqrt{65}}{2}$
h. $x = \dfrac{5+\sqrt{57}}{8}$
i. $x = \dfrac{7}{4}$

21. **a.** No tiene solución.
b. $x = 2{,}375$ ó $x = 0{,}01025$
c. $x = 2{,}075$ ó $x = 0{,}0001$

Capítulo 4

p | **85**

1. $\alpha = 45°\ 35'\ 4{,}88''$

p | **86**

2. 1431,81 metros.
3. 26° 33’ 54” y 64° 26’ 6”
4. 1,34 metros.

p | **88**

5. $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{h}{a}$ y $\operatorname{sen}(180º - \alpha) = \dfrac{h}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \operatorname{sen}\beta \,.\, a = \operatorname{sen}(180º - \alpha) \,.\, b$;
como $\operatorname{sen}(180º - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\beta \,.\, a = \operatorname{sen}\alpha \,.\, b$;
dividiendo ambos miembros por a . b,

$\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$. Si trazamos la altura correspondiente al lado **d**, obtenemos que

$\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$. Por lo tanto, queda demostrado el teorema para triángulos obtusángulos.

6. e = 6,128; f = 5,1423; g = 4,5547248; c = 5,445; d = 3,554.
7. a = 62°; b = 60° 55’ 46”; c = 39° 4’ 14”

p | **89**

8. 777,862 metros.
9. 145,81 metros.

p | **90**

10. Respuesta **c.**
11. Segundo cuadrante.
12. Cuarto cuadrante.

p | **91**

13. **a.**
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}{\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \operatorname{tg}\alpha$$

b.
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

c.
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

d.
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adyasente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

e.
$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

p | **92**

14. a = 2,5217 cm; b = 14,7893 cm.
15. 75,48 km

p | **93**

16.

GRADOS	RADIANES
45	$\frac{\pi}{4}$
100	$\frac{5}{9}\pi$
–130	$-\frac{13}{18}\pi$
60	$\frac{\pi}{3}$
36	$\frac{\pi}{5}$
–85° 56’ 37’’	–1,5

p | **95**

17. $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \,.\, \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

18. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 45°, el otro ángulo no recto mide también 45°; por lo tanto, el triángulo es isósceles. Si cada uno de los catetos mide x, por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide $\sqrt{2} \,.\, x$.

$\operatorname{Sen} 45° = \dfrac{x}{\sqrt{2} \,.\, x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$; de la misma manera, se demuestra que $\cos 45° = \dfrac{1}{2}$.

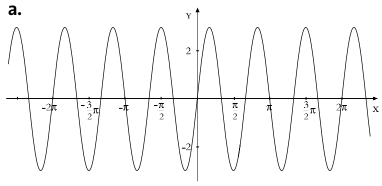
p | **97**

19. **a.** tg 30° = 0,577367205
b. sen 60° = 0,866
c. cos 60° = 0,5
d. sen 150° = 0,5
e. cos 150° = –0,866
f. sen 330° = –0,5
g. cos 330° = 0,866
h. sen 210° = –0,5
i. cos 210° = –0,866
j. tg 210° = 0,577367205

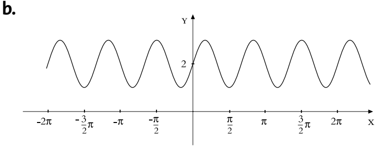
20. **a.** $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$
b. $\operatorname{sen}\dfrac{3}{4} \,.\, \pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
c. $\cos\dfrac{3}{4} \,.\, \pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
d. $\operatorname{sen}\dfrac{7}{4} \,.\, \pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
e. $\cos\dfrac{7}{4} \,.\, \pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
f. $\operatorname{sen}\dfrac{5}{4} \,.\, \pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
g. $\cos\dfrac{5}{4} \,.\, \pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
h. $\operatorname{tg}\dfrac{5}{4} \,.\, \pi = 1$

p | **99**

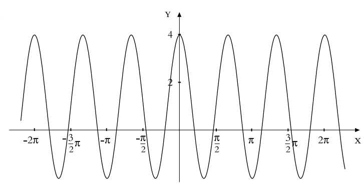
21. **a.**



b.



c.



22. **a.** Amplitud = 3; período = $\frac{2}{3}$. π; frecuencia = 3; ángulo de fase = 0.

b. Amplitud = 1; período = $\frac{2}{3}$. π; frecuencia = 3; ángulo de fase = 0.

c. Amplitud = 3; período = $\frac{2}{3}$. π; frecuencia = 3; ángulo de fase = $-\frac{\pi}{6}$.

p | **100**

23. **a.** $x = \frac{\pi}{6} + 2 . k . \pi$ ó $x\ \frac{5}{6} = . \pi + 2k . \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

b. $x = \pi + 2k . \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

c. $x = \frac{\pi}{2} + 2k . \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

d. $x = \frac{2}{3} . \pi + 2k . \pi$ ó $x = \frac{4}{3} . \pi + 2 . k . \pi$,

con $k \in \mathbb{Z}$

e. $x = 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{\pi}{3} + 2 . k . \pi$ ó

$x = \frac{5}{3} . \pi + 2 . k . \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

Guía de ejercitación

1. Perímetro = 30,66 cm; área = 42,9 cm².
2. No existe un rombo cuyos lados midan 8 cm y su diagonal mayor, 5 cm.
3. 75° 31' 21" y 14° 28' 39"
4. 56° 26' 33,7"
5. 48,8 m
6. Área = 742,12832 cm²; perímetro = 142,26 cm.
7. 6,39234272 m
8. 28,1 m
9. Altura del acantilado: 379,95 m; distancia original del barco al acantilado: 286,31 m.
10. 382,717 m
11. Longitud de los cables: 39,4357 m y 34,0467 m; altura de la torre: 49,55 m.
12. Área = 99,65 cm²; perímetro = 193,77 cm.
13. x = 3,48663426 cm.
14. x = 19,53214066 cm; y = 15,38080597 cm.
15. **a.** sen α . cotg α . sec α =

$= \text{sen}\,\alpha . \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} . \frac{1}{\cos\alpha} = 1$

b. cos α + cos α . tg² α =

$= \cos\alpha + \cos\alpha . \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \cos\alpha + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

c. (sen α − cos α) . (cosec α + sec α) =

$= (\text{sen}\,\alpha - \cos a) . \left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$

$= 1 + \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} - 1 = \text{tg}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha$

d. $\sec^2\alpha - 3 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 3 =$

$= \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 3 = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} - 3 =$

$= \text{tg}^2\alpha + 1 - 3 = \text{tg}^2\alpha - 2$

16. En todos los casos, $k \in \mathbb{Z}$.
a. x = 0,201 + 2 . k . π ó x = 2,94 + 2 . k . π
b. π + 2 . k . π
c. x = 4,0376 + 2 . k . π ó x = 5,38713 + 2 . k . π

d. $x = \frac{\pi}{2} + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{3}{2} . \pi + 2 . k . \pi$

e. $x = \frac{\pi}{2} + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{3}{2} . \pi + 2 . k . \pi$

f. x = 2,237 + 2k . π ó x = 4,046149548 + 2k . π

g. $x = \frac{\pi}{6} + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{5}{6} . \pi + 2 . k . \pi$ ó

$x = \frac{7}{6} . \pi + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{11}{6} . \pi + 2 . k . \pi$

h. $x = \frac{\pi}{2} + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{3}{2} . \pi + 2 . k . \pi$ ó

$x = \frac{\pi}{6} + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{5}{6} . \pi + 2 . k . \pi$

i. $x = \frac{3}{2} . \pi + 2 . k . \pi$

j. $x = \frac{\pi}{4} + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{3}{4} . \pi + 2 . k . \pi$ ó

$x = \frac{5}{4} . \pi + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{7}{4} . \pi + 2 . k . \pi$

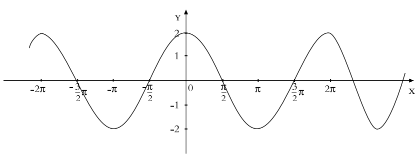
k. $x = \frac{\pi}{2} + 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{\pi}{6} + 2 . k . \pi$ ó

$x = \frac{5}{6} . \pi + 2 . k . \pi$

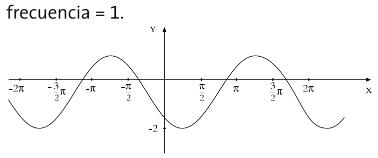
l. $x = 2 . k . \pi$ ó $x = \frac{\pi}{3} + 2 . k . \pi$ ó

$x = \frac{2}{3} . \pi + 2 . k . \pi$

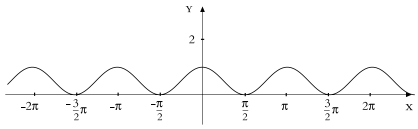
17. **a.** Dom f = ℝ; Im f = [−2; 2]; ángulo de fase = 0; amplitud = 2; período = 2 . π; frecuencia = 1.



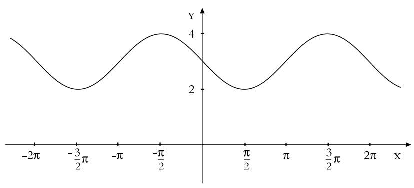
b. Dom f = ℝ; Im f = [−1; 1]; ángulo de fase = $-\frac{2}{3}$. π; amplitud = 1; período = 2 . π; frecuencia = 1.



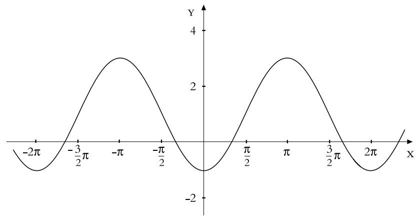
c. Dom f = ℝ; Im f = [0; 1]; ángulo de fase = 0; amplitud = $\frac{1}{2}$; período = π; frecuencia = 2.



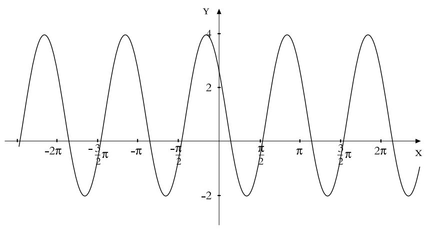
d. Dom f = ℝ; Im f = [2; 4]; ángulo de fase = $-\frac{\pi}{2}$; amplitud = 1; período = 2 . π; frecuencia = 1.



e. Dom f = ℝ; Im f = [−1; 3]; ángulo de fase = −π; amplitud = 2; período = 2 . π; frecuencia = 1.



f. Dom f = ℝ; Im f = [−2; 4]; ángulo de fase = $-\frac{\pi}{6}$; amplitud = 3; período = π; frecuencia = 2.



18. No existe una función seno cuyo período sea π y su frecuencia, 3.

19. $f(x) = \frac{1}{2} . \cos\left(4x - \frac{4}{5} . \pi\right) + 1$

20. **a.** Máximo = 13°; mínimo = 11°.
b. Cada 360 días.

Libro 3 Capítulo 1

p | **15**

1. **a.** 4,123 **b.** 2,924 **c.** 1,618

2. **a.** Sí, pues $1^3 < 5 < 3^3$.
b. No, pues $51077 > 226^2$.
c. Sí, pues $233^3 < 12812900 < 234^3$.

p | **16**

3. Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional; entonces, existen **a** y **b** $\in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$) tales que

$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, siendo $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible.

Por lo tanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$.

Luego, como 2 es un número primo, a^2 es par $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ **a** debe ser par $\Rightarrow a = 2 \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 = (2k)^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ es múltiplo de 2 $\Rightarrow$ **b** también es múltiplo de 2; es decir, tanto **a** como **b** son pares; por lo tanto, $\frac{a}{b}$ no es una fracción irreducible, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no se puede escribir como fracción; luego, no es un número racional.

4. 1,414

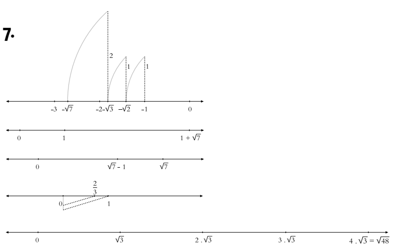
5. Sí, pues $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, que es racional.

6. No, pues $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fuera racional $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ con **a** y **b** $\in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b}{a}$, como **a** es entero, $\sqrt{2}$ sería racional, lo cual es absurdo.

p | **18**

7.



8. **a. I.** Falso, pues si (a + b) fuera racional, (a + b) = k, con $k \in \mathbb{Q}$; por lo tanto, a = k – b; como $b \in \mathbb{Z}$, entonces $k - b \in \mathbb{Q}$, por lo que **a** $\in \mathbb{Q}$.
II. Falso. Si b = 0, a . b = 0, por lo que (a . b) es racional.
b. I. Falso, pues, por ejemplo: $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, que es irracional .
II. Falso, pues, por ejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

9. Por ejemplo: $\sqrt{3}$.

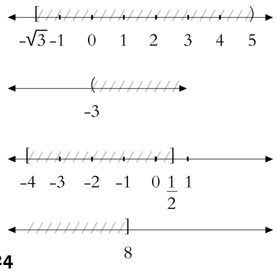
10. Hay infinitos, dado que entre dos números irracionales (por ejemplo $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2} + \frac{1}{3}$) siempre se puede encontrar otro.

11. **a.** Ninguno, pues $\sqrt{8} < 3$.
b. Hay infinitos. Por ejemplo: 2,8; 2,82; 2,43. Entre dos números racionales **a** y **b** siempre existe otro racional, por ejemplo $\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
c. Hay infinitos, porque entre dos números irracionales siempre hay otro.
d. Hay infinitos, pues $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Como hay infinitos números irracionales, en particular, hay infinitos números reales.

p | **21**

12. **a.** [–1; 2)
b. No es un intervalo, hay un único valor: x = 11.
c. (–1; 1)

13.



p | **24**

14. **a.** Hay muchas respuestas, algunas de las cuales son: 2,968 y 2,9723.
b. Hay muchas respuestas, algunas de las cuales son: –9,244 y –9,237.

15. **a.** 2,9762; 2,971387
b. –9,247; –9,2413924

16. Si se redondea, $4{,}245 \leq x < 4{,}255$.
Si se trunca, $4{,}25 \leq x < 4{,}259$.

17. Si se redondea, $-8{,}74534 \leq x \leq -8{,}74525$, con error < 0,00005.
Si se trunca, $-8{,}74539 \leq x \leq -8{,}7453$, con error < 0,00009.

18. Error absoluto: 0,0021; error porcentual: 1,96%.

Guía de ejercitación

1. **a.** 7,141es irracional. **b.** 5,759 es irracional. **c.** 2,5 es racional. **d.** 0,059 es racional. **e.** 0,667 es racional. **f.** 0,5 es racional.

2. **a.** < ; **b.** < ; **c.** = ; **d.** < ; **e.** >

3. Supongamos que $\sqrt{3}$ es un número racional; entonces, existen **a** y **b** $\in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$) tales que

$\frac{a}{b} = \sqrt{3}$, siendo $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible.

Por lo tanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 3 \cdot b^2$.

Luego, como 3 es un número primo, a^2 es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ **a** debe ser múltiplo de 3 $\Rightarrow a = 3k$, con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = (3k)^2 \Rightarrow 9k^2 = 3b^2 \Rightarrow 3k^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ **b** es múltiplo de 3; es decir, tanto **a** como **b** son múltiplos de 3; por lo tanto, $\frac{a}{b}$ no es una fracción irreducible, lo cual es absurdo. Luego, $\sqrt{3}$ no se puede escribir como fracción; entonces, no es un número racional.

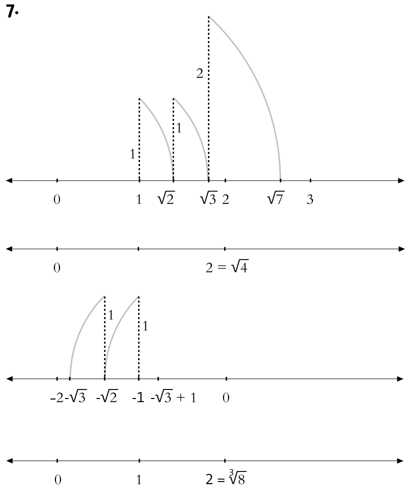
4. **a.** Una cifra.
b. Infinitas cifras, pues es periódico.
c. Infinitas cifras, pues es irracional.
d. Infinitas cifras, pues es irracional.

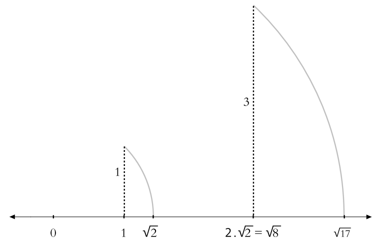
5.

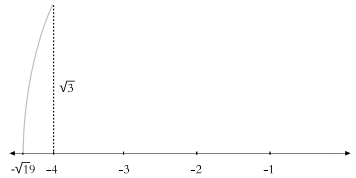
NÚMERO	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
2,254125			x		x
–1,121212			x		x
8	x	x	x		x
–100000		x	x		x
$2{,}3 \cdot 10^3$	x	x	x		x
$(\sqrt{2})^4$	x	x	x		x
$\sqrt[5]{27}$				x	x
$\frac{5}{12}$			x		x
$-\frac{4}{2}$		x	x		x
$\sqrt{2} + 2$				x	x
$-\frac{\sqrt{5}}{2}$				x	x

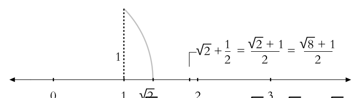
6. **a.** Falso; por ejemplo: $\frac{1}{3}$.
b. Falso; por ejemplo: $\sqrt{3}$.
c. Verdadero, pues en ese caso se puede escribir como fracción.
d. Verdadero, porque no se puede escribir como fracción.

7.



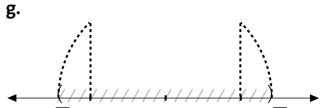




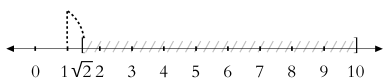


8. El mayor es $\sqrt{x}+1$, pues: $\sqrt{y} < \sqrt{x} < \sqrt{x} + 1$;
$y^2 < y < \sqrt{y} < \sqrt{x} < \sqrt{x} + 1$; $x^2 < x < \sqrt{x} < \sqrt{x} + 1$.

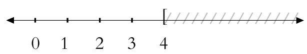
9. **a.** No es posible, pues $2^2 > 3$; por lo tanto, no existen dos números naturales en A; el único natural en A es x = 1.
b. {–1; 0; 1}
c. 0,5; 0,25; $-\frac{1}{2}$; –0,25; 0,3
d. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e. Hay infinitos, porque entre dos números reales distintos siempre se puede encontrar otro.
f. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$
g.



10. **a.** $[\sqrt{2}; 10]$



b. $[4; +\infty)$



11.

NÚMERO	REDONDEO A 2 CIFRAS DECIMALES	ERROR ABSOLUTO POR REDONDEO	ERROR PORCENTUAL POR REDONDEO	TRUNCAMIENTO A 2 CIFRAS DECIMALES	ERROR ABSOLUTO EN EL TRUNCAMIENTO	ERROR PORCENTUAL EN EL TRUNCAMIENTO
5,1278	5,13	0,0022	0,042%	5,12	0,0078	0,15%
5,1218	5,12	0,0018	0,035%	5,12	0,0018	0,035%
5,12578	5,13	0,00422	0,0822%	5,12	0,00578	0,113%
$4,1\overset{\frown}{26}$	4,13	$0,00\overset{\frown}{3}$	0,08%	4,12	$0,00\overset{\frown}{6}$	0,1618%
$4,1\overset{\frown}{26}$	4,13	$0,00\overset{\frown}{37}$	0,09%	4,12	$0,0\overset{\frown}{62}$	1,52%
–3,2548	–3,25	0,0048	0,15%	–3,25	0,0048	0,147%
–3,2595	–3,26	0,0005	0,015%	–3,25	0,095	0,2923%

12. **a.** Entre 8,24535 y 8,24545.
b. 0,00005

13. **a.** Entre 8,2454 y 8,24549.
b. 0,00009

14. **a.** Entre 7 y 8.
b. V_a = 7,67834

15. **a.** Entre 1,4 y 1,9. **c.** Entre –0,2 y 0,3.
b. Entre $\frac{10}{9}$ y $\frac{10}{7}$. **d.** Entre 0,1 y 0,3.

16. **a.** Son siempre menores o iguales al número exacto, pues al quitarle cifras decimales, el número obtenido puede ser menor.
b. A veces mayores y a veces menores que el número exacto.
Por ejemplo: 2,4167889 ≈ 2,417; en este caso, la aproximación es mayor, pero 2,41123 ≈ 2,41, que es menor que el número original.

Capítulo 2

p | **35**

1. **a.** 3 **b.** 5
2. $\sqrt{250}$
3. Los catetos miden $\sqrt{5}$ cm y $2 . \sqrt{5}$ cm.

p | **36**

4. Queremos probar que: $(\sqrt[n]{a} . \sqrt[m]{b})^{n.m} = a^m . b^n$
$(\sqrt[n]{a} . \sqrt[m]{b})^{n.m} = (\sqrt[n]{a})^{n.m} . (\sqrt[m]{b})^{n.m} =$
$= a^{\frac{n.m}{n}} . b^{\frac{n.m}{m}} = a^m . b^n$

5. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a . b}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{a} . \sqrt[m]{b} =$
$= \sqrt[n.m]{a^m . b^n}$; $\sqrt[n]{a^n} = a$, si n, m ∈ **N** son impares.
Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = -a$.

6. **a.** Falso: $\sqrt{a^2 . b} = \sqrt{a^2} . \sqrt{b} = |a| . \sqrt{b}$, si a < 0, es falso.
b. Verdadero: $\sqrt[3]{a^3 . b} = \sqrt[3]{a^3} . \sqrt[3]{b} = a . \sqrt[3]{b}$
c. Verdadero: $a^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{a^3}}$
d. Verdadero: $a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

p | **37**

7. $a^{-2} < 1 < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a^2 < a^3$
8. $a^3 < a^2 < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < 1 < a^{-2}$
9. $\sqrt[5]{b}$

p | **38**

10. **a.** $\sqrt[8]{8}$ **c.** $\sqrt[12]{\frac{y^9}{b^8 x^{10}}}$ **e.** $\sqrt[9]{x}$
b. $\sqrt[8]{5}$ **d.** $\sqrt{18}$

p | **39**

11. **a.** 0 **d.** $-29 - 3 . \sqrt{3}$
b. $5 . \sqrt{5}$ **e.** $2 . \sqrt{0,1} - 0,3$
c. $-6 . \sqrt{3}$ **f.** $\frac{1}{2\sqrt[6]{2}} - 4 . \sqrt[4]{2}$

p | **40**

12. **a.** $a\sqrt[6]{1 + b^6}$ **b.** $\frac{-8}{z . \sqrt{z^2 + 8}}$

13. **a.** $S = \{-8 . (1 - \sqrt{2})\}$ **b.** S = {17}

p | **41**

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. Perímetro = $5 + \sqrt{10}$ cm; área = $\frac{5}{4}$ cm^2.

p | **42**

16. **a.** $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$ **c.** $\sqrt{2} - 1$
b. $2 - \frac{\sqrt{6}}{4}$ **d.** $\frac{6 + 10 . \sqrt{3} + 4 . \sqrt{5} + 3 . \sqrt{15}}{11}$

17. **a.** $\frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}$ **b.** $\frac{1}{\sqrt{a + h} + \sqrt{a}}$

Guía de ejercitación

1. Por ejemplo: $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$.
2. Por ejemplo: $\frac{\sqrt[3]{7}}{3} + \frac{2 . \sqrt[3]{7}}{3} = \sqrt[3]{7}$.
3. $-3 - \sqrt[5]{17}$; $\sqrt{5} - \sqrt[5]{17} - 8$; $2\sqrt[5]{17} - 9$
4. = ; =; >; =; =
5. $\frac{2 . \sqrt{3} - 3}{4}$ cm^2
6. $4 . \sqrt{3} + \sqrt{30}$ cm
7. **a.** 9 **d.** $27 . \sqrt{3}$ **g.** –1
b. $\frac{72}{5}\sqrt{3}$ **e.** – 2 **h.** $\frac{2\sqrt[3]{361}}{19}$
c. $\sqrt{7} - 1$ **f.** $\sqrt{57} + 3 . \sqrt{6}$

8. **a.** $S = \{\sqrt[5]{4}\}$ **e.** $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{3}\}$
b. $S = \left\{\frac{2 . \sqrt{7}}{5}\right\}$ **f.** $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{12}\right\}$
c. S = ϕ **g.** $S = \left\{-\frac{63}{62}\right\}$
d. S = {0; 6} **h.** $S = \left\{\frac{5}{3} . \sqrt{\frac{5}{3}}; -\frac{5}{3} . \sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$

9. **a.** $\sqrt{x} + \sqrt{3}$ **d.** 1
b. $\frac{1}{\sqrt{x - 1} + 1}$ **e.** $\frac{\sqrt[3]{4ab^2}}{2b}$
c. $\sqrt[3]{(x - 3)^2}$

10. **a.** Falso, pues la radicación no es distributiva respecto de la suma.
b. Verdadero, pues la radicación es distributiva respecto de la multiplicación.
c. Falso, pues $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$.
d. Verdadero, pues $\sqrt[9]{18} = (18^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{9}} = 18^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{18}$.

e. Falso, pues $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}}\,.\,5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{5^7}$.
f. Falso, pues la radicación no es distributiva respecto de la suma.
g. Verdadero, pues la radicación es distributiva respecto de la multiplicación.

11. $\frac{8}{3}$

12. $(1+\sqrt{x-1})^2 = x + 2\,.\,\sqrt{x-1}$
$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^2 = 2\,(x+\sqrt{x^2-1})$
$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) = 2$
$\sqrt{a^2} = -a$ (con $a < 0$)

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}\,.\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\,(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)\,(\sqrt{5}+1)} = \frac{3}{2}$$

Capítulo 3

p | **53**

1. **a.** 16; 32; 64 **c.** 4; –4; 4
b. $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{256}$; $\frac{1}{1024}$

2. **a.** $a_n = 2^n$ **c.** $a_n = (-1)^n\,.\,4$
b. $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

3. Son progresiones aritméticas la **a.** y la **c.** Si cada término de la sucesión restado al anterior es constante, es una progresión aritmética.
4. Por ejemplo: $a_n = 3 - 0{,}25\,.\,n$.

p | **54**

5. **a.** $a_{22} = 91$ **b.** $a_{22} = -5$
6. –25,2; –22,2; –19,2; –16,2; –13,2
7. Por ejemplo: $a_n = 5\,.\,(-0{,}25)^n$
8. Son progresiones geométricas la **a.**, la **b.** y la **d.** Si cada término de la sucesión dividido por el anterior es constante, es una progresión geométrica.
9. **a.** r = –1 **b.** $r = \frac{1}{2}$ **d.** r = –2

p | **55**

10. $2400
11. 4,623% mensual.
12. $1609,34
13. $9008,77

p | **56**

14. 18 meses.
15. $1299,94
16. 3105
17. 1341

p | **57**

18. $2255991009\,.\,10^{10}$
19. –4304672
20. 871696100

p | **58**

21. **a.** $420 **b.** 200 semanas.
22. **a.** $512 **b.** A la novena semana superan los $570.

p | **59**

23. $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

p | **60**

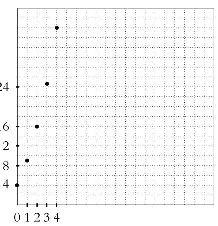
24. $15520; $13840; $12160; $10480; $8800; $7120
25. $548,336217

p | **61**

26. $1939,633045
27. Le conviene la segunda opción.
28. $34,04

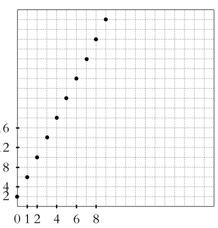
p | **62**

29. $a_n = (n+2)^2$



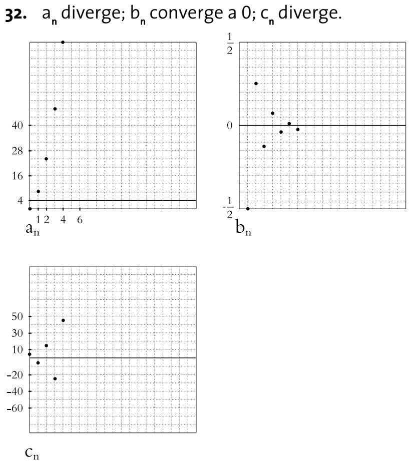
p | **63**

30. **a.** 82 perlas. **b.** $a_n = 4n + 2$
c.



p | **64**

31. No, son divergentes.
32. a_n diverge; b_n converge a 0; c_n diverge.



p | **65**

33. Si |r| < 1
34. Si |r| > 1
35. Si r = – 1
36. Converge si r = 0; diverge si r ≠ 0; no puede ser oscilante.

p | **67**

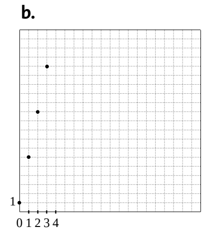
37. $7719,87
38. $7173,2

p | **69**

39. a_n: cantidad de conejos el día 15 del mes n;
$a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 3$; $a_4 = 3$; ...; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall n \geq 2$

Guía de ejercitación

1. **a.** 1,2; 0; –1,2; –2,4 **c.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$
b. $3\,.\,\sqrt{3}$; –9; $9\,.\,\sqrt{3}$; – 27
2. **a.** $a_n = 4{,}8 - n\,.\,1{,}2$ **c.** $a_n = (-1)^n\,.\,\sqrt{2}$
b. $a_n = -1\,.\,(-\sqrt{3})^n$
3. a_n = –2; 4; –8; 16; –32; ...
b_n = –1; –3; –33; –163; –513; ...
c_n no se puede construir pues no existe a_1
d_n = 0; 4; 10; 18; 28; ...
4. **a.** Es una progresión aritmética.
r = –0,1; $a_n = 3{,}25 - 0{,}1n$
b. Es una progresión geométrica.
r = 0,5; $a_n = 4\,.\,(0{,}5)^n$
c. Es una progresión aritmética.
r = 0,25; $a_n = 0{,}25 + 0{,}25n$
5. **a.** $a_{34} = -0{,}15$ **c.** $a_{34} = 8{,}75$
b. $a_{34} = 2{,}32830644\,.\,10^{-10}$
6. 0,7; 2,2; 3,7; 5,2; 6,7
7. Por ejemplo: $a_n = 8\,.\,\left(\frac{1}{3}\right)^n$
8. $a_n = 6{,}5 + 1{,}25\,.\,n$
9. $a_n = \frac{64}{9}\,.\,\left(\frac{3}{2}\right)^n$
10. 0,96; 1,52; 2,08; 2,64
11. –6; –9; –13,5; –20,25
12. 345
13. 810
14. 690
15. 14 meses
16. $1372607547\,.\,10^5$
17. $\frac{20}{3}\,.\,\left(\frac{1}{2^{40}} - 1\right)$
18. No tiene solución.
19. 20200
20. Devuelve $547,48605; a_9 = $59,75462843
21. **a.** 2960 cm **b.** 400 + 10n
22. $a_n = 3$; converge a 3.
23. **a.** $a_n = 5n + 1$
b.

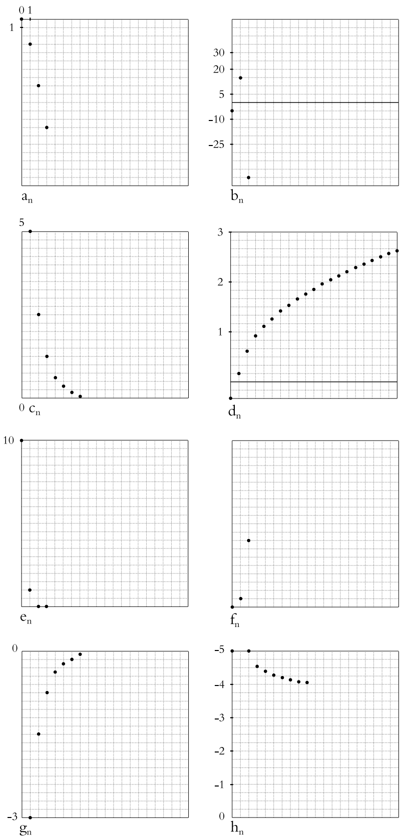


c. Diverge.

24. $a_n = (-1)^n \,.\, 3$

25. Las sucesiones a_n, b_n y f_n divergen.

c_n converge a 0; d_n converge a 3; e_n converge a 0; g_n converge a 0 y h_n converge a 4.



Capítulo 4

p | **80**

1. **a.** $x = 13$

b. $x = 2$ ó $x = -\dfrac{5}{7}$

c. $x = -17$

d. No hay ningún número racional que verifique la igualdad.

p | **84**

2. **a.** $5 - 4i$ **e.** $66 - 30i$

b. $5 + 13i$ **f.** $-16 + 16i$

c. $13 - i$ **g.** $-26 - 9i$

d. $10 + 6i$

p | **85**

3. **a.** $= \overline{z + w} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{a+c+(b+d)i} =$

$= a + c - (b + d)i =$

$= a + c - bi - di = a - bi + c - di = \overline{z} + \overline{w}$

b. $= \overline{z - w} = \overline{(a+bi)-(c+di)} = \overline{a-c+(b-d)i} =$

$= a - c - (b - d)i =$

$= a - c - bi + di = a - bi - (c - di) = \overline{z} - \overline{w}$

4. **a.** $9 + 6i$ **b.** $-2 + 2i$

p | **86**

5. **a.** $-1{,}9 + 3{,}3i$ **b.** $7{,}4 - 0{,}8i$

6. **a.** $x = -1{,}5 + 2{,}5i$ ó $x = -1{,}5 - 2{,}5i$

b. $x = 0{,}25 - 0{,}25i$

c. $x = 1 + 5i$ ó $x = 1 - 5i$

7. Sí, es solución.

p | **87**

8. **a.** $x \,.\, (x - 1) \,.\, (x + 2i) \,.\, (x - 2i)$

b. $(x + 1) \,.\, (x - 2) \,.\, [x - (1 + 2i)] \,.\, [x - (1 - 2i)]$

c. $x \,.\, (x - 2) \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 3i) \,.\, (x + 3i)$

9. **a.** $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ó $|z| = 1$ **d.** $z = a + ai, a \in \mathbb{R}$

b. $z = 1$ ó $z = 0{,}5 + i$ **e.** No tiene solución.

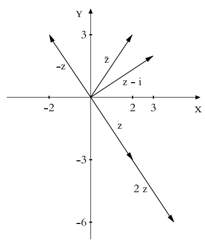
c. $z = -i$

p | **90**

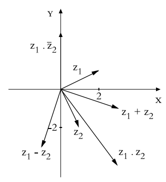
10. **a.** 0 **b.** -1 **c.** $-8 - 6i$ **d.** $-\dfrac{5}{41} - \dfrac{4}{41}i$

p | **91**

11.



12.



13. $3 + 2i$

$4i$

p | **92**

14. **a.** $\sqrt{2} \,.\, \left(\cos \dfrac{3}{4}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{3}{4}\pi\right)$

b. $2 \,.\, \left(\cos \dfrac{4}{3}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{4}{3}\pi\right)$

c. $6\sqrt{2} \,.\, \left(\cos \dfrac{7}{4}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{7}{4}\pi\right)$

d. $2 \,.\, \left(\cos \pi + i\operatorname{sen} \pi\right)$

e. $5 \,.\, \left(\cos \dfrac{1}{9}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{1}{9}\pi\right)$

f. $\left(\cos \dfrac{3}{2}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{3}{2}\pi\right)$

g. $\cos \dfrac{1}{5}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{1}{5}\pi$

p | **93**

15. **a.** $|a + 0i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$

b. $|bi| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$

c. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = |-z|$

d. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{-a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$

e. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |\mathrm{Re}(z)|$

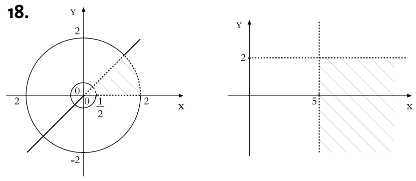
f. $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ y $b = 0 \Leftrightarrow z = 0$

p | **94**

16. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \left|z \,.\, \dfrac{1}{w}\right| = |z| \,.\, \left|\dfrac{1}{w}\right| = |z| \,.\, \dfrac{1}{|w|} = \dfrac{|z|}{|w|}$

17. **a.** Falso. **b.** Falso. **c.** Verdadero.

18.



19. **a.** $\dfrac{\pi}{2}$ **b.** 5,82

p | **97**

20. **a.** $\dfrac{2048}{15625}i$

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{28} \,.\, 3^8}\left(\cos \dfrac{13}{12}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{13}{12}\pi\right)$

c. $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}i$

p | **98**

21. **a.** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\,i;\ -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\,i$

b. $2 + i\,;\ -2 - i$

c. $i\,;\ -i$

d. $1 - i\,;\ -1 + i$

p | **99**

22. **a.** $z_0 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0$ $\quad z_1 = \cos \dfrac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{2}{3}\pi$

$z_2 = \cos \dfrac{4}{3}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{4}{3}\pi$

b. $z_0 = \sqrt[16]{2}\left(\cos \dfrac{7}{32}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{7}{32}\pi\right)$

$z_1 = \sqrt[16]{2}\left(\cos \dfrac{15}{32}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{15}{32}\pi\right)$

$z_2 = \sqrt[16]{2}\left(\cos \dfrac{23}{32}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{23}{32}\pi\right)$

$z_3 = \sqrt[16]{2}\left(\cos \dfrac{31}{32}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{31}{32}\pi\right)$

$z_4 = \sqrt[16]{2}\left(\cos \dfrac{39}{32}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{39}{32}\pi\right)$

$z_5 = \sqrt[16]{2}\left(\cos \dfrac{47}{32}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{47}{32}\pi\right)$

$z_6 = \sqrt[16]{2}\left(\cos \dfrac{55}{32}\pi + i\operatorname{sen} \dfrac{55}{32}\pi\right)$

$z_7 = \sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{63}{32}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{63}{32}\pi\right)$

c. $z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi\right)$

$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)$

$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi\right)$

$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi\right)$

d. $z_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{12}\pi\right)$

$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$

$z_2 = {}^{3}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{23}{12}\pi\right)$

p | **100**

23. **a.** $z_0 = 12\,.\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi\right)$

$z_1 = 12\,.\left(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi\right)$

$z_2 = 12\,.\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi\right)$

b. $z_0 = 1{,}6873 - 2{,}6381\,i$
$z_1 = 0{,}66484 - 0{,}6967\,i$
$z_2 = 0{,}568874 - 0{,}4952336\,i$
$z_3 = 0{,}56143 - 0{,}2532277\,i$
$z_4 = 0{,}535466 - 0{,}0788\,i$
$z_5 = 0{,}535466 + 0{,}0788\,i$
$z_6 = 0{,}54 + 0{,}25155\,i$
$z_7 = 0{,}568874 + 0{,}4952336\,i$
$z_8 = 0{,}66484 + 0{,}6967\,i$
$z_9 = 1{,}6873 + 2{,}6381\,i$

$z_k = \frac{-w_k}{1 - w_k}$, donde

$w_k = \sqrt[10]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{10}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{10}\right)\right]$

con $k = 0, 1, ..., 9$

c. $z \in \mathbb{R}$ ó $z = bi$, con $b \in \mathbb{R}$

d. $z = 0$ ó $z = 1$ ó $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ó $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Guía de ejercitación

1. **a.** $x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$ ó $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$

b. $x = 1 + \sqrt{3}i$ ó $x = 1 - \sqrt{3}i$

2. **a.** $-2 - 4\sqrt{2} + (4 + 6\sqrt{2})i$ **d.** $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

b. $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$ **e.** $-i$

c. $\frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$

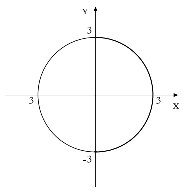
3. **a.** $2 - 2i$ **b.** $-1 - i$

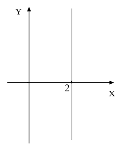
4. **a.** $-\frac{1}{4} + \frac{13}{10}i$ **b.** $-\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$

c. $-1 - \frac{1}{2}i$

5. **a.** $x = 7;\ y = -1$ **b.** $x = -\frac{14}{9};\ y = -\frac{17}{8}$

6. **a.** $|z| = 3$ **c.** No tiene solución.
b. $z = 2 + bi$, con $b \in \mathbb{R}$.





7. $x = a + 5i$, con $a \in \mathbb{R}$

8. $x = \frac{1}{3};\ y = -1$

9. **a.** $\frac{7\sqrt{5}}{3125}$ **b.** $\frac{7500\sqrt{2}}{169}$

10. **a.** $\cos(2\pi - \alpha) + i\,\text{sen}(2\pi - \alpha)$

b. $2\,.\,[\cos(\alpha + \pi) + i\,\text{sen}(\alpha + \pi)]$

c. $5\,.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

d. $\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$

e. $5\,.\left(\cos\frac{19}{14}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{19}{14}\pi\right)$

11. $z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$

$z_1 = 4\left(\cos\frac{9}{24}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{9}{24}\pi\right)$

$z_2 = 4\left(\cos\frac{17}{24}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{17}{24}\pi\right)$

$z_3 = 4\left(\cos\frac{25}{24}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{25}{24}\pi\right)$

$z_4 = 4\left(\cos\frac{33}{24}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{33}{24}\pi\right)$

$z_5 = 4\left(\cos\frac{41}{24}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{41}{24}\pi\right)$

12. **a.** $\frac{1}{2^{26}}\,.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

b. $2^{102}\,.\,\sqrt{2}\,.\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$

13. **a.** $z_0 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} + \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}}\,i$

$z_1 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}}\,i$

b. $z_0 = 3\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad z_1 = -3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

14. **a.** $w\,.\,(1 + w + w^2) = w + w^2 + w^3 = w + w^2 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (w - 1)\,.\,(1 + w + w^2) = 0$, como $w \neq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + w + w^2 = 0$
b. $(1 - w + w^2)\,.\,(1 + w - w^2) = 3 - w^2 - w =$
$= 4 - (w^2 + w + 1) = 4 - 0 = 4$

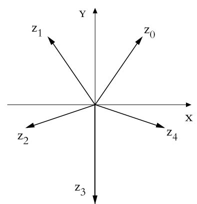
15. $z_0 = 2\left(\cos\frac{3}{10}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{10}\pi\right)$

$z_1 = 2\left(\cos\frac{7}{10}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{10}\pi\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{11}{10}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{11}{10}\pi\right)$

$z_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right)$

$z_4 = 2\left(\cos\frac{19}{10}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{19}{10}\pi\right)$



16. $2;\ -2;\ 2i;\ -2i$

17. $n = 24k$, con $k \in \mathbb{N}$

18. **a.** $z_0 = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0$

$z_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi$

$z_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi$

b. $z_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi\right)$

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$

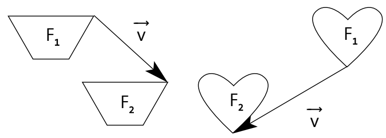
$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$

$z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)$

Capítulo 1

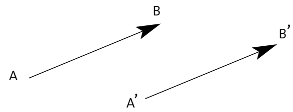
p | **13**

1. **a.** **b.**

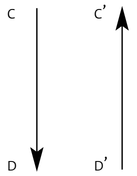


p | **14**

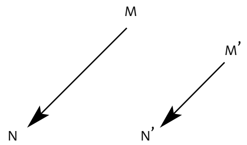
2.



3.

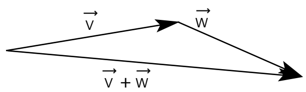


4.

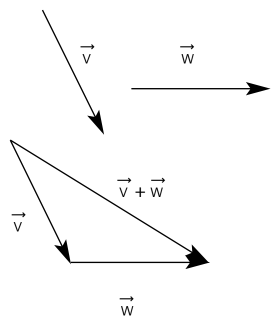


p | **15**

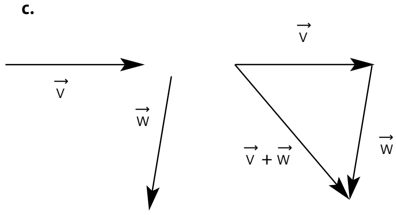
5. **a.**



b.

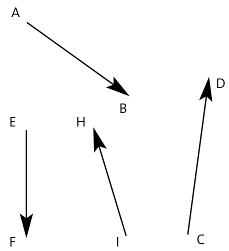


c.

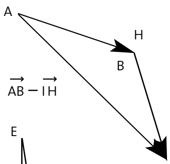


p | **16**

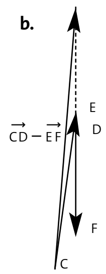
6.



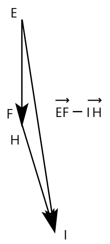
a.



b.

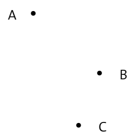


c.

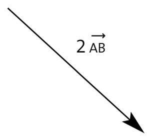


p | **18**

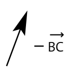
7.



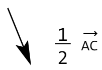
a.



b.



c.

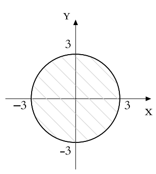


p | **19**

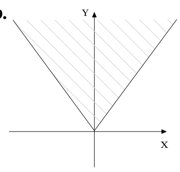
8. $\vec{a} = (3; 2)$; $\vec{b} = (-4; -1)$; $\vec{c} = (-3; 4)$; $\vec{d} = (1; 4)$; $\vec{e} = (4; 1)$

p | **20**

9. **a.**



b.



p | **21**

10. $|\vec{a}| = \sqrt{34}$; $\phi = 30°\ 57'\ 49{,}52''$
$|\vec{b}| = 4$; $\phi = 90°$
$|\vec{c}| = \sqrt{53}$; $\phi = 15°\ 56'\ 43{,}425''$

p | **22**

11. **a.** No es único; cualquier vector de la forma: $a_1(7; 3) + a_2(1; 5)$, con a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}$, cumple con la condición. Por ejemplo: (23; 19).
b. No es único; cualquier vector de la forma: $a_1(15; 11) + a_2(1; 5)$, con a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}$, cumple con la condición. Por ejemplo: (–10; 14).
c. No es único; cualquier vector de la forma: $a_1(7; 3) + a_2(1; 5) + a_3(15; 11)$, con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, cumple con la condición. Por ejemplo: (30; 22).

p | **23**

12. $\vec{a} + \vec{b} = (6; 3)$; $\vec{c} + \vec{a} = (3; -6)$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 0)$; $\vec{b} - \vec{a} = (-8; 9)$; $2\vec{a} = (14; -6)$; $3\vec{c} - 4\vec{a} = (-40; 3)$

13. Por ejemplo: (10; 4); (–5; –2); (2,5; 1).

p | **24**

14. Propiedad 1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Propiedad 4. Sean **a** y **b** dos vectores, y sea α el ángulo entre ellos.
Si $n \geq 0 \Rightarrow \alpha$ es el ángulo entre $n\vec{a}$ y $\vec{b}$, y $|n\vec{a}| = n|\vec{a}| \Rightarrow n(\vec{a} \cdot \vec{b}) = n|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = |n\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = (n\vec{a}) \cdot \vec{b}$
Si $n < 0 \Rightarrow$ el ángulo entre $n\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $(\pi - \alpha)$, y $|n\vec{a}| = -n|\vec{a}| \Rightarrow n(\vec{a} \cdot \vec{b}) = n|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = -|n\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = |n\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\alpha) = |n\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \alpha) = (n\vec{a}) \cdot \vec{b}$
Propiedad 5. Un vector con sí mismo forma un ángulo de $0° \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|^2$
Propiedad 6. Si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$, el ángulo formado entre ellos es de 90°; entonces, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = 0$.

p | **26**

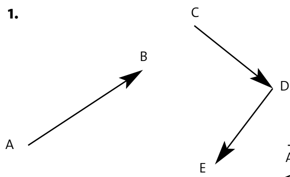
15. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -25$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = -19$; $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -33$; $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = -6$

16. 122° 39' 39,2"; 128° 39' 40,8"

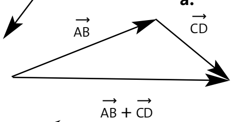
17. **a.** Por ejemplo: (0,15706; 0,98759). No es único, hay infinitos vectores que cumplen con la condición dada.
b. Por ejemplo: (–3; 5).

Guía de ejercitación

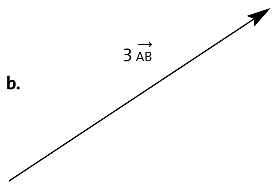
1.



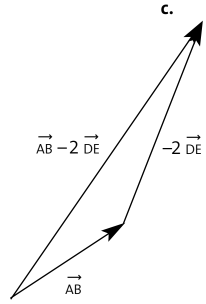
a.



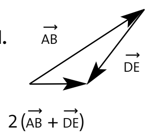
b.



c.



d.



2. **a.** $\vec{OP} = 3\vec{a}$ **b.** $\vec{ON} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$ **c.** $\vec{PN} = \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$

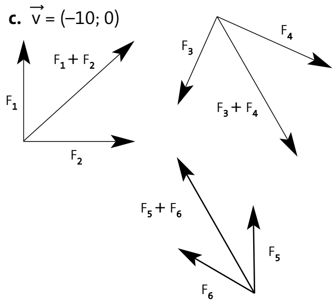
   d. $\vec{QP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

3. $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$; $\vec{BP} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{RQ} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$;

   $\vec{QA} = -\frac{1}{2}\vec{a}$

4. $\vec{a} = (3; 2)$; $\vec{b} = (-1; 3)$; $\vec{c} = (-3; -1)$; $\vec{d} = (3; -1)$
5. **a.** $m = 5$ ó $m = -3$ **b.** $m = 2\sqrt{3}$ ó $m = -2\sqrt{3}$
6. $|\vec{a}| = \sqrt{13}$; $\phi = 33°\ 41'\ 24{,}24''$
   $|\vec{b}| = \sqrt{10}$; $\phi = 161°\ 33'\ 54{,}1''$
   $|\vec{c}| = \sqrt{10}$; $\phi = 198°\ 26'\ 5{,}816''$
   $|\vec{d}| = \sqrt{10}$; $\phi = 341°\ 33'\ 54{,}184''$

7. **a.** $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{75}}{2}; \frac{5}{2}\right)$

   b. $\vec{v} = (0{,}34729655; 1{,}969615506)$
   c. $\vec{v} = (-10; 0)$
8. 

9. **a.** $(3; 2) = (5; 3) - \frac{1}{4}(8; 4)$

   $(9; 7) = 5(5; 3) - 2(8; 4)$

   b. $(0; 2) = 4(5; 3) - \frac{5}{2}(8; 4)$

   $(-2; 0) = 2(5; 3) - \frac{3}{2}(8; 4)$

10. **a. b.** No, no son equivalentes.
11. **a.** Por ejemplo: $\vec{CE}$, con E = (0; 2).
    b. Sí, son paralelos.
    c. Por ejemplo: E = (1; 3).
12. **a.** (−7; −2) **d.** (−4; 3) **f.** (21; 64)
    b. (4; 16) **e.** 60 **g.** 19
    c. (9; −10)
13. **a.** 23 **b.** 3 **c.** 11 **d.** 5
14. 48
15. **a.** 43° 5’ 27” **b.** 91° 50’ 51,4”
16. **a.** Sí. **b.** Sí. **c.** No.
17. y = 2. La respuesta es única.
18. x = 0. La respuesta es única.
19. $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, para todo **x**.
20. 101° 18’ 35,75”; 45°; 33° 41’ 24,243”
21. 85° 36’ 4,66” y 94° 23’ 55,34”

22. $m = \frac{96 + 50\sqrt{3}}{11}$ ó $m = \frac{96 - 50\sqrt{3}}{11}$

23. w = (−5; 2) ó w = (5; −2). Dado un vector, hay infinitos vectores perpendiculares a él contenidos en una recta. Al fijar el módulo del vector, obtenemos dos soluciones opuestas entre sí.

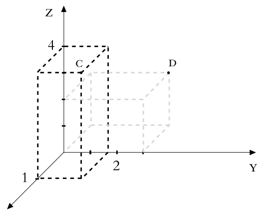
Capítulo 2

p | **13**

1. Por ejemplo, podría poner el punto de referencia en el techo, en el rincón derecho de la parte posterior al escenario; por lo tanto, debería indicar cuántos centímetros hacia abajo debe colgar la lámpara, además de cuántos centímetros hacia delante y cuántos hacia la izquierda.

p | **38**

2. **a.** A = (4; 3; 2); B = (2; 5; 3)
   b.



p | **40**

3. $\vec{AB} = (-3; -1; 12)$; $\vec{MN} = (6; 1; 3)$; $\vec{AM} = (-6; -4; 3)$;
   $\vec{NA} = (0; 3; -6)$; $\vec{BN} = (3; -2; -6)$; $\vec{MB} = (3; 3; 9)$

p | **41**

4. $|\vec{a}| = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{5}$; $|\vec{c}| = \sqrt{35}$
5. (0; −3; 4)
6. $|\vec{w}| = \sqrt{61}\ .\ |m|$

p | **42**

7. **a.** (6; −5; −12) **e.** (3; 18; −12)
   b. (6; −13; −3) **f.** (−2; −12; 8)
   c. (1; 14; −13) **g.** (−2; 28; −37)
   d. (−5; 19; −1) **h.** (19; −8; −7)

p | **43**

8. $\vec{a}\ .\ \vec{b} = -3$; $\vec{a}\ .\ \vec{c} = -14$; $\vec{b}\ .\ \vec{c} = -7$

9. $|\vec{v}| = \frac{\sqrt{24}}{5}$. La solución es única.

10. Hay infinitas soluciones; una de ellas es (1; 0; 2).

p | **44**

11. **a.** 25° 5’ 33,1” **c.** 66° 33’ 14”
    b. 83° 14’ 29,454”

p | **45**

12. $\vec{m}$ y $\vec{n}$ son ortogonales.
13. Hay infinitos; uno de ellos es (3; 1; 0).

p | **46**

14. $\vec{a} \times \vec{b} = (16; -12; -8)$; $\vec{a} \times \vec{v} = (43; 29; 3)$;
    $\vec{w} \times \vec{b} = (-23; -2; -5)$; $\vec{v} \times \vec{w} = (-55; -8; -20)$

p | **47**

15. Supondremos que $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$;
    $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$; $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$
    ■ $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (c_3a_2 + b_2c_3 - c_2a_3 - c_2b_3; c_1a_3 +$
    $+ c_1b_3 - a_1c_3 - b_1c_3; c_2a_1 + c_2b_1 - c_1a_2 - c_1b_2)$
    $(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) =$
    $(a_2c_3 - c_2a_3; c_1a_3 - a_1c_3; c_2a_1 - a_2c_1) +$
    $+ (b_2c_3 - c_2b_3; c_1b_3 - b_1c_3; c_2b_1 - b_2c_1) \Rightarrow$
    $\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$

    ■ $(k\vec{a}) \times \vec{b} = (ka_2b_3 - ka_3b_2; ka_3b_1 - kb_3a_1;$
    $ka_1b_2 - ka_2b_1) =$
    $= k\ .\ (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - a_2b_1)$

    $k\ .\ (\vec{a} \times \vec{b}) = k\ .\ (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - a_2b_1)$

    $\vec{a} \times (k\vec{b}) = (a_2kb_3 - a_3kb_2; a_3kb_1 - kb_3a_1;$
    $a_1kb_2 - a_2kb_1) =$
    $= k\ .\ (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - a_2b_1) \Rightarrow$
    $\Rightarrow (k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$

    ■ $(\vec{a} \times \vec{b})\ .\ \vec{a} = (a_2b_3 - a_3b_2)\ .\ a_1 +$
    $+ (a_3b_1 - b_3a_1)\ .\ a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\ .\ a_3 =$
    $= a_2b_3a_1 - a_3b_2a_1 + a_3b_1a_2 - b_3a_1a_2 + a_1b_2a_3 - a_2b_1a_3 = 0$

    $(\vec{a} \times \vec{b})\ .\ \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\ .\ b_1 + (a_3b_1 - b_3a_1)\ .\ b_2 +$
    $+ (a_1b_2 - a_2b_1)\ .\ b_3 =$
    $= a_2b_3b_1 - a_3b_2b_1 + a_3b_1b_2 - b_3a_1b_2 + a_1b_2b_3 -$
    $- a_2b_1b_3 = 0$

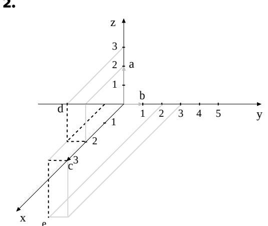
    ■ $(\vec{a} \times \vec{b})\ .\ (\vec{a} \times \vec{b}) = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2$
    $+ (a_1b_2 - a_2b_1)^2 =$
    $= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_1^2 + b_3^2a_1^2 -$
    $- 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1 =$
    $= b_1^2\ .\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + b_2^2\ .\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) +$
    $+ b_3^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 -$
    $- 2a_2b_3a_3b_2 - 2a_3b_1b_3a_1 - 2a_1b_2a_2b_1 =$
    $= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\ .\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) -$
    $- [(a_1b_1 + a_2b_2)^2 + b_3^2a_3^2 + 2a_3b_3\ .\ (a_1b_1 +$
    $+ a_2b_2)] = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\ .\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) -$
    $- (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$
    $= (\vec{a}\ .\ \vec{a})\ .\ (\vec{b}\ .\ \vec{b}) - (\vec{a}\ .\ \vec{b})^2$

p | **23**

16. **a.** $9\ .\ \sqrt{5}$ **b.** $\sqrt{141}$
17. Área = $\frac{3}{2}$

Guía de ejercitación

1. A = (2; 5; 4); B = (1; 8; 7); C = (2; 3; 4)
2.



3. **a.** $\overrightarrow{DE} = (1; 0; -4)$; $\overrightarrow{EC} = (-3; 1; 5)$; $\overrightarrow{EB} = (-3; 2; 2)$
b. $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{17}$; $|\overrightarrow{EC}| = \sqrt{35}$; $|\overrightarrow{EB}| = \sqrt{17}$

4. $x = \sqrt{15}$ ó $x = -\sqrt{15}$

5. **a.** (5; –6; 2) **e.** (–28; 28; 35)
b. (5; –4; 10) **f.** (0,8; –0,8; 1)
c. (5; –6; 4) **g.** (16; –16; 16)
d. (–30; 24; –48) **h.** $\left(\frac{62}{3}; -\frac{64}{3}; 15\right)$

6. $\vec{c} = (-1; 6; 10)$

7. $\vec{c} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

8. $\vec{a} = 2\sqrt{6}$

9. **a.** 21° 50’ 43,6” **b.** 25° 37’ 45,474”
c. 36° 8’ 26”

10. Perímetro = $\sqrt{46} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{14}$.
Ángulos: 108° 13’ 34,827”; 36° 45’ 2,838”; 35° 1’ 22,335”.

11. Son ortogonales sólo los vectores del ítem **b**.

12. Hay infinitos, pues queda planteada una ecuación con tres incógnitas. Por ejemplo, dos de estos vectores son: (5; 1; 0) y (9; 1; 2).

13. **a.** D = (4; 2; 7) **b.** D = (0; 4; 3)

14. **a.** –15 **b.** 64 **c.** 7 **d.** 7 **e.** –15

15. Área = $\sqrt{197}$

16. $\vec{v} = \left(2\sqrt{\frac{1}{54}}; -7\sqrt{\frac{1}{54}}; \sqrt{\frac{1}{54}}\right)$ ó

$\vec{v} = \left(-2\sqrt{\frac{1}{54}}; 7\sqrt{\frac{1}{54}}; -\sqrt{\frac{1}{54}}\right)$

17. $m = -\frac{5}{3}$

18. Son infinitos, porque las coordenadas del vector verifican
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 25y - 4a_2 - 3a_3 = 12,5$

19. $\sqrt{\frac{12}{883}} \cdot (1; 1; 42)$ ó $-\sqrt{\frac{12}{883}} \cdot (1; 1; 42)$

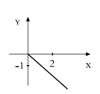
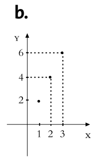
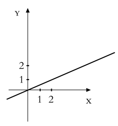
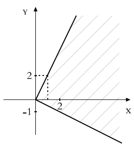
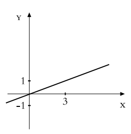
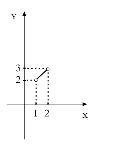
20. Área = $2\sqrt{3}$

21. Área = $\sqrt{46}$

Capítulo 3

p **| 59**

1. **a.** **b.** **c.**

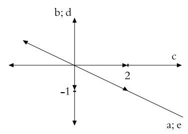







d. **e.** **f.**

p **| 60**

2. **a.** L: X = k . (2; –1) **d.** L: X = k . (0; –1)
b. L: X = k . (0; 3) **e.** L: X = k . (–2; 1)
c. L: X = k . (2; 0) k ∈ ℝ en todos los casos

3.

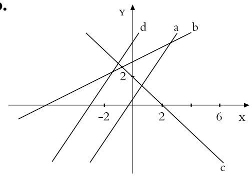


4. Son la misma recta; sus vectores dirección son múltiplos.

p **| 61**

5. **a.** L: X = k . (2; 3) + (1; 2)
b. L: X = k . (6; 3) + (–2; 2)
c. L: X = k . (–2; 2) + (0; 2)
d. L: X = k . (2; 3) + (–1; 3)
k ∈ ℝ en todos los casos.

6.



7. Las rectas son paralelas y sus vectores dirección son múltiplos.

p **| 62**

8. $\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3k + 2 \end{cases}$ con k ∈ ℝ

9. 3x – 6y = –18

10. $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{2}$

11. **a.** L: X = k . (–1; 1; 3) + (1; 2; 3), k ∈ ℝ
b. L: X = k . (–2; –3; 2) + (0; –2; 4), k ∈ ℝ

12. L: X = k . (2; –3; 7) + (0; 6; 7), k ∈ ℝ

p **| 63**

13. **a.** La dirección es (–3; 1) y dos puntos en la recta son, por ejemplo, (2; 1) y (–1; 2).
b. La dirección es $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ y dos puntos en la recta son, por ejemplo, (3; 2) y (1; –1).
c. La dirección es (4; 3) y dos puntos en la recta son, por ejemplo, (1; 2) y (5; 5).

14. **a.** La dirección es (–1; 0; 3) y dos puntos en la recta son, por ejemplo, (1; 2; –2) y (0; 2; 1).
b. La dirección es (–1; 1; 3) y dos puntos en la recta son, por ejemplo, (2; 0; – 4) y (1; 1; –1).
c. La dirección es (1; –3; 1) y dos puntos en la recta son, por ejemplo, (1,5; – 1; 0) y (2,5; –4; 1).

p **| 64**

15. Son paralelas las rectas de los ítems **b.** y **c.**, pues sus direcciones son múltiplos.

16. 2x + 3y = 11. Hay una sola recta que cumple las condiciones.

p **| 65**

17. L: X = k(1; 1; 0) + (–2; 5; 1), k ∈ ℝ. Hay una sola recta que cumple las condiciones.

18. **a.** Son perpendiculares, pues el producto escalar entre sus direcciones es 0.
b. No son perpendiculares, porque el producto escalar entre sus direcciones no da cero.

19. L: (–2; 5) + λ(–4, 5), λ ∈ ℝ. Hay una sola recta que cumple las condiciones.

p **| 66**

20. Son muchas las rectas que verifican dicha condición. Por ejemplo:
L: X = k(3; –4; –3) + (0; 1; 2), k ∈ ℝ

21. **a.** (–4; 6) **b.** (3; 0; –5)

p **| 68**

22. $d = 2\sqrt{5}$

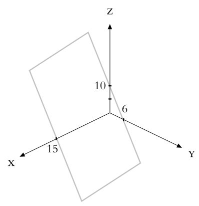
23. **a.** –3x + 2y – z = 10 **b.** 2y + 4z = 18

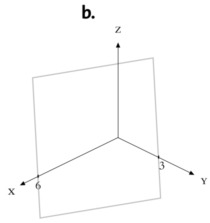
24. **a.** Sí. **b.** No. **c.** No.

25. **a.** –1 **b.** 9 **c.** –11

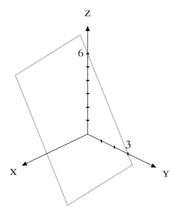
p **| 69**

26. **a.** **b.**





c.



p **| 71**

27. –x + z = 1

28. 2x + 2y – 5z = 0

29. X = k(1; 1; –1) + (0; 0; 3), k ∈ ℝ

30. $\left(\frac{5}{4}; 1; \frac{11}{4}\right)$

p **| 72**

31. 2x + y + 5z = 27. Hay un único plano.

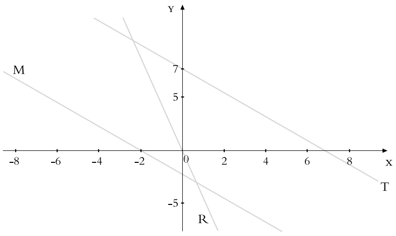
32. Hay muchos planos, uno de los cuales es x – y = –2.

33. Hay infinitas rectas, una de las cuales es
L: X = K . (1; –1; –2), k ∈ ℝ

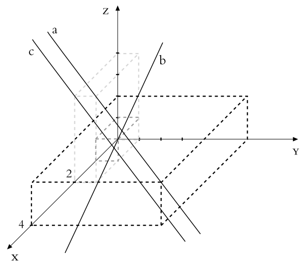
34. Hay una única recta.
L: X = k . (2; –1; 1) + (1; 1; 1), k ∈ ℝ

Guía de ejercitación

1. **a.** M: X = k (–8; 8) + (2; –4), k ∈ ℝ
b. R: X = k (1; –4), k ∈ ℝ
c. T: X = k (8; –8) + (2; 5), k ∈ ℝ



2. **a.** L: $X = k(6; 1) + (12; 0)$, $k \in \mathbb{R}$. Tres puntos de la recta son, por ejemplo, (0; –2); (6; –1); (12; 0).
   b. L: $X = k(3; 1) + (14; 0)$. Tres puntos de la recta son, por ejemplo, (14; 0); (17; 1); (11; –1).
   c. L: $X = k(2; -5) + (-5; 4)$, $k \in \mathbb{R}$. Tres puntos de la recta son, por ejemplo, (–5; 4); (–3; –1); (–1; –6).
3. **a.** L: $X = k(2; 5; -2) + (2; 1; 4)$, $k \in \mathbb{R}$
   b. L: $X = k(2; 3; 4) + (1; 1; 1)$, $k \in \mathbb{R}$
   c. L: $X = k(2; 5; -2) + (3; 4; 1)$, $k \in \mathbb{R}$



4. **a.** L: $X = k(-1{,}5; 1; 2) + (0{,}5; 0; 2)$, $k \in \mathbb{R}$. Tres puntos de la recta son, por ejemplo, (0,5; 0; 2); (–1; 1; 4); (2; –1; 0).
   b. L: $X = k(-1; 1; 0) + (2; 0; -2)$, $k \in \mathbb{R}$. Tres puntos de la recta son, por ejemplo, (2; 0; –2); (1; 1; –2); (0; 2; –2).
   c. L: $X = k(0; 1; 0) + (2; 2; 3)$, $k \in \mathbb{R}$. Tres puntos de la recta son, por ejemplo, (2; 2; 3); (2; 3; 3); (2; 0; 3).
5. Sí (para k = 0,5).
6. L: $X = k\,(2; 3) + (-2; 1)$, $k \in \mathbb{R}$
7. $d = \dfrac{19\sqrt{13}}{13}$
8. **a.** (3; 1) **b.** $S = \phi$
9. **a.** (2; –1; 3) **b.** Las rectas no se cortan.
10. Las rectas del ítem **9. a.** se cortan y las del **9. b.** son alabeadas.
11. **a.** $-3x + 2y = -1$. Tres puntos del plano son, por ejemplo, (–1; –2; 5); (3; 4; 0); (1; 1; 7).
    b. $x - 12y - 2z = -16$. Tres puntos del plano son, por ejemplo, (0; –1; 14); (0; 0; 8); (–4; 1; 0).
    c. $x + y - 3z = 5$. Tres puntos del plano son, por ejemplo, (0; 5; 0); (5; 0; 0); (1; –2; –2).
    d. $4x + 4y - z = 1$. Tres puntos del plano son, por ejemplo, (0; 0; –1); (1; –1; –1); (1; 1; 7).
12. Son infinitas. Dos de ellas son:
    L: $X = k(1; -1; 0) + (0; 0; 1)$ $k \in \mathbb{R}$
    S: $X = k(0; -1; 1) + (0; 0; 1)$, $k \in \mathbb{R}$
13. Es única. L: $X = k(2; -1; 1) + (-1; 2; 2)$, $k \in \mathbb{R}$.
14. $x + z = 2$
15. Hay infinitos, por ejemplo: $3x + z = 4$
16. **a.** L: $X = k(1; -5; -7) + (0; 5; 5)$, $k \in \mathbb{R}$
    b. Los planos son paralelos.
17. (–11; 9; 2)
18. No, la recta no está contenida en el plano.
19. Sí, la recta está contenida en el plano.

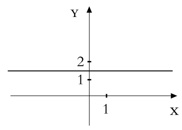
Capítulo 4

p | **83**

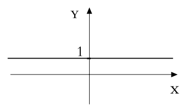
1. Es un cuarto de la circunferencia de centro (0; 0) y radio 2.

p | **84**

2. Es la recta de ecuación y = 1,5



3.



p | **85**

4. **I.** Trazamos el $\overline{AB}$.
   II. Trazamos una recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. Elegimos un punto P cualquiera en dicha recta.
   III. Trazamos la circunferencia de centro P y radio $\overline{AP}$.
   Por lo dicho en **II.**, hay infinitas circunferencias que pasan por A y B.
5. **I.** Trazamos los segmentos AB, BC y CA.
   II. Marcamos en cada uno de ellos su punto medio.
   III. Trazamos las rectas perpendiculares a los segmentos trazados que pasan por sus puntos medios. Estas rectas se cortan en un punto que llamaremos O; éste es el centro de la circunferencia.
   IV. Tomamos con el compás la distancia entre el centro O y el punto A o el B o el C, y trazamos la circunferencia.
   Por lo dicho en **III.**, la circunferencia es única.
6. No es posible, porque los tres puntos están alineados.

p | **86**

7. $\left(4 + \dfrac{\sqrt{15}}{2}; 5{,}5\right)$ y $\left(4 - \dfrac{\sqrt{15}}{2}; 5{,}5\right)$
8. $(3; 5 + \sqrt{3})$ y $(3; 5 - \sqrt{3})$
9. Sí, pues dist ((2, 5); (4; 5)) = 2.
10. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$

p | **87**

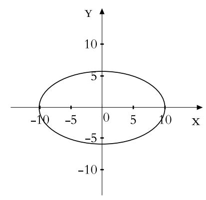
11. **a.** Centro = (–3; 2); radio = $2\sqrt{2}$.
    b. Centro = (0; 9); radio = $\sqrt{46}$.
12. $\left(\dfrac{-72 + 7\sqrt{91}}{29}; \dfrac{93}{29} - \dfrac{3}{29}\sqrt{91}\right)$ y
    $\left(\dfrac{-72 - 7\sqrt{91}}{29}; \dfrac{93}{29} + \dfrac{3}{29}\sqrt{91}\right)$
13. Están dentro de la circunferencia: $\left(\dfrac{1}{2}; -1\right)$; (3; 1).
    Están fuera de la circunferencia: (1; 5) ; (0; 5).
    Están sobre la circunferencia: (1; 2); (–4; –3).

p | **89**

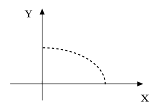
14. Perímetro = $5 + \sqrt{29} + 2\sqrt{2}$
15. Hay infinitos puntos, todos deben verificar la ecuación $\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 32$.
    Por ejemplo: $(4\sqrt{15}; 0)$; $(-4\sqrt{15}; 0)$; (0; 16);
    (0; –16); $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{15}; 2\right)$.
16. $(0; 7 + 4\sqrt{15})$; $(0; 7 - 4\sqrt{15})$; (–16; 7); (16; 7);
    $\left(16\dfrac{\sqrt{17}}{20}; 1\right)$.

p | **90**

17. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$



18. Es un cuarto de elipse.

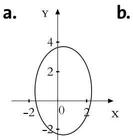


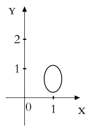
p | **91**

19. **a.** $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(x+3)^2}{49} = 1$
    b. $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$
20. $\left(\dfrac{2}{5}\sqrt{5}; \dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)$; $\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}; \dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)$;
    $\left(\dfrac{2}{5}\sqrt{5}; -\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)$; $\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}; -\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)$.

p | **93**

21. **a.** Focos: $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3} + \sqrt{5}\right)$; $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3} - \sqrt{5}\right)$; $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
    b. Focos: $\left(1; \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$; $\left(1; \dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$; $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

a. 

b. 

22. Por ejemplo: (0,5; 0); (–0,5; 0).

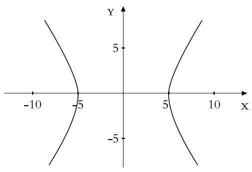
23. **a.** Focos: $(\sqrt{13}; 0)$; $(-\sqrt{13}; 0)$; $e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

b. Focos: $(\sqrt{13}; 0)$; $(-\sqrt{13}; 0)$; $e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

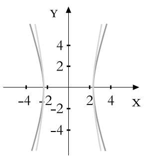
p **| 97**

24. Asíntotas: $y = \dfrac{6}{5}x$; $y = -\dfrac{6}{5}x$.

Focos: $(\sqrt{61}; 0)$; $(-\sqrt{61}; 0)$.



25. $(\sqrt{5}; 0)$; $(-\sqrt{5}; 0)$



p **| 98**

26. **a.** Es la hipérbola $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{5} = 1$,

con focos: (3; 0) y (–3; 0).

b. Es la hipérbola $\dfrac{(x+2)^2}{2} - \dfrac{(y-3)^2}{\frac{5}{2}} = 1$,

con focos: $\left(0; \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(0; -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

c. Es la hipérbola $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = -1$,

con focos: $(0; 2\sqrt{3})$ y $(0; -2\sqrt{3})$.

p **| 100**

27. $x = \dfrac{y^2}{16}$

28. $y = \dfrac{x^2}{32}$

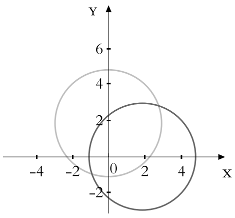
29. **a.** Foco: $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$; directriz: $y = -\dfrac{3}{2}$.

b. Foco: $\left(\dfrac{9}{4}; 0\right)$; directriz: $y = -\dfrac{9}{4}$.

Guía de ejercitación

1. $x^2 + (y-2)^2 = 9$

2. $\left(1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}; 1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$ y $\left(1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}; 1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$



3. $(x-8,5)^2 + (y+1)^2 = 18,25$

4. Sólo la ecuación del ítem **c.** corresponde a la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

5. **a.** Infinitas.

b. $(x-21,5)^2 + (y-13,5)^2 = 552,5$

6. **a.** Por ejemplo: (–2; 0); (–1; –1); (–2; 1); (–2; –2) y (0; –1).

b. Por ejemplo: (–2; 2); (1; 0); (1; 1); (0; 2) y (–4; 1).

c. Por ejemplo: (0; 0); (–4; 0); (–1; 1); (0; –2) y (–1; –3).

7. $\dfrac{(x-3)^2}{31,25} + \dfrac{y^2}{56,25} = 1$

8. **a.** $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

b. $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{(y-5)^2}{9} = 1$

c. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$

d. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{\frac{441}{16}} = 1$

e. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 9$

f. $y^2 = 10x$

g. $y^2 = -10x$

h. $\dfrac{x^2}{\frac{225}{91}} - \dfrac{y^2}{25} = -1$

i. $10y = x^2$

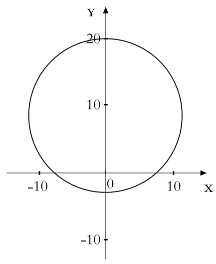
j. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$

k. $\dfrac{(y-5)^2}{25} - \dfrac{(x-5)^2}{\frac{25}{3}} = 1$

l. $10y = -x^2$

m. $\dfrac{(x+3)^2}{36} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

9. $\dfrac{(x-1)^2}{144} + \dfrac{(y-9)^2}{121} = 1$

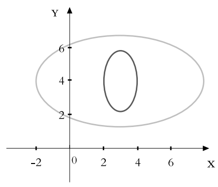


10. **a.** Es una elipse de ecuación

$\dfrac{(x+1)^2}{2} + (y-3)^2 = 1$.

b. Es una circunferencia de ecuación $x^2 + (y+3)^2 = 17$

11. La intersección es vacía. $S = \phi$

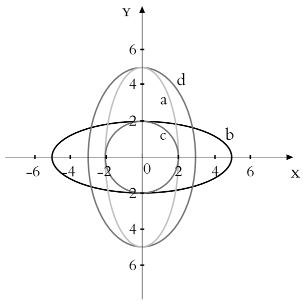


12. **a.** Por ejemplo: (4; 0); (5; 0); (5; –1); (6; 0) y (4; –4).

b. Por ejemplo: (2; 1); (2; –1); (0; 2); (8; 3) y (0; 0).

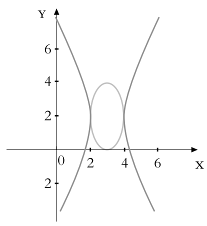
c. (7; –2); (3; –2); (5; 1); (5; –5); $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3} + 5; 0\right)$

13.

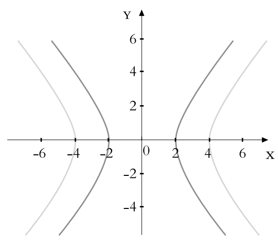


14. $\dfrac{x^2}{\frac{25}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{11}{4}} = 1$

15. **a.** (4; 2); (2; 2)

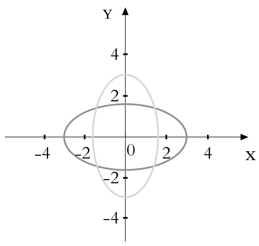


b. No tienen intersección.



c. $\left(\frac{6\sqrt{13}}{13};\ \frac{6\sqrt{13}}{13}\right);\ \left(-\frac{6\sqrt{13}}{13};\ \frac{6\sqrt{13}}{13}\right);$

$\left(\frac{6\sqrt{13}}{13};-\frac{6\sqrt{13}}{13}\right);\ \left(-\frac{6\sqrt{13}}{13};-\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$



16. **a.** $y^2 = 4x$ **b.** $y^2 = -4x$

17. **a.** Foco: $\left(\frac{1}{8}; 0\right)$; directriz: $x = -\frac{1}{8}$.

b. Foco: $\left(0; \frac{1}{32}\right)$; directriz: $y = -\frac{1}{32}$.

Capítulo 1

p | **15**

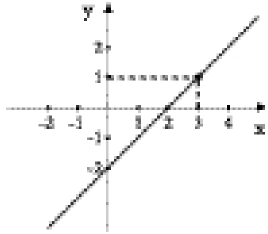
1. **a.** Dom f = $\mathbb{R} - \{3\}$

b.

x	3,01	3,0001	2,99	2,99999
f(x)	1,01	1,0001	0,99	0,99999

c. f(x) = x −2, si x ≠ 3.

d.



2. Para x ≠ 1 y x ≠ −3.

p | **16**

3. **a.** 0

b. No existe, porque cuando **x** toma valores cada vez más cercanos a −2 y menores a él, f(x) toma valores cada vez más próximos a 4. En cambio, cuando **x** toma valores cada vez más cercanos a −2, y mayores a él, f(x) toma valores cada vez más próximos a 2. Es decir que los límites laterales de f(x), cuando **x** tiende a −2, no coinciden.

c. $-\frac{1}{2}$

p | **17**

4. **a.** 5, pues a medida que **x** toma valores cada vez más próximos a 0, pero mayores a él, f(x) toma valores cada vez más cercanos a 5.

b. 2, porque cuando **x** toma valores cada vez más próximos a 0, pero menores a él, f(x) toma valores cada vez más cercanos a 2.

c. No existe, ya que los límites de f(x), cuando **x** tiende a 0 por izquierda y por derecha, no coinciden.

d. 2, pues el punto (0 ; 2) pertenece a la función f(x).

e. 3, porque a medida que **x** tiende a 1 por derecha, f(x) tiende a 3.

f. 3, ya que a medida que **x** tiende a 1 por izquierda, f(x) tiende a 3.

g. 3, pues los límites laterales de f(x), cuando **x** tiende a 1, son iguales.

h. 3, porque la función f(x) pasa por el punto (1; 3).

i. 1, ya que cuando **x** tiende a 4 por derecha, f(x) tiende a 1.

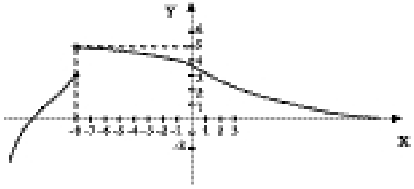
j. 1, pues cuando **x** tiende a 4 por izquierda, f(x) tiende a 1.

k. 1, porque los límites laterales de f(x) a medida que **x** tiende a 4 coinciden.

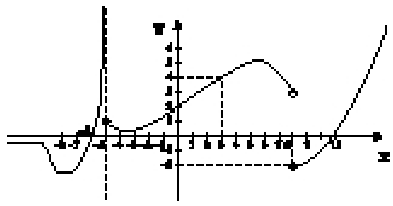
l. No existe, ya que 4 ∉ Dom f.

p | **18**

5. Por ejemplo:

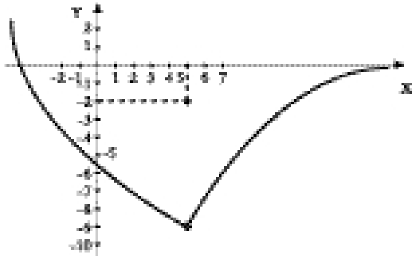


6. Por ejemplo:

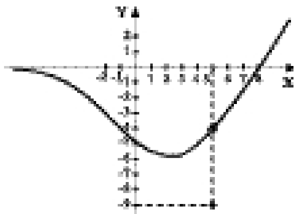


p | **19**

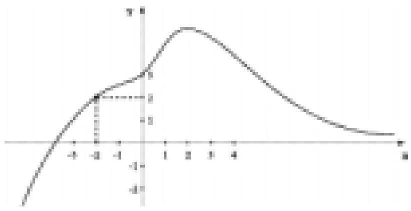
7. **a.** Falsa, pues, por ejemplo:



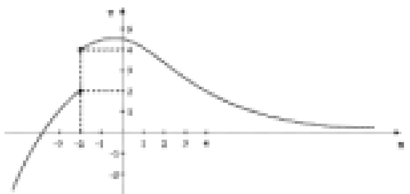
b. Falsa, porque, por ejemplo:



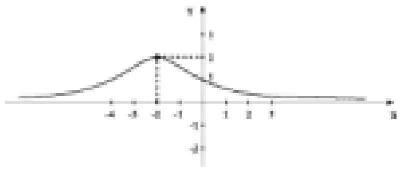
c. Falsa, ya que, por ejemplo:



d. Falsa, pues, por ejemplo:



e. Falsa, porque, por ejemplo:



p | **20**

8. **a.** +∞, pues a medida que **x** toma valores cada vez más cercanos a 3 pero menores a él, f(x) toma valores cada vez más grandes.

b. −∞, porque a medida que **x** toma valores cada vez más próximos a 3, pero mayores a él, f(x) toma valores negativos cada vez más grandes en módulo.

c. 0, ya que cuando **x** tiende a 5 por izquierda, f(x) tiende a 0.

d. 0, pues cuando **x** tiende a 5 por derecha, f(x) tiende a 0.

e. $\frac{1}{2}$ 3 5 7

f. $\frac{1}{2}$ 5 4

pues a medida que **x** toma valores cada vez más grandes en módulo, f(x) toma valores cada vez más cercanos a $\frac{1}{2}$.

p | **21**

9. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.

p | **22**

10. **a.** Diverge, porque $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$

b. Diverge, ya que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 2) = +\infty$.

c. Oscila, pues no existe $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5 \cdot (-1)^n$.

d. Converge, porque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

p | **24**

11. **a.** Decir que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = Q$, significa que a medida que **x** toma valores cada vez más próximos a x_0, g(x) toma valores cada vez más cercanos a Q. Luego, cuando **x** toma valores cada vez más próximos a x_0, − g(x) toma valores cada vez más cercanos a − Q. Entonces: $\lim\limits_{x\to x_0} (-g(x)) = -Q = -\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) + (-g(x))] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} (-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + (-\lim_{x\to x_0} g(x)) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

b. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = R$, entonces, cuando **x** toma valores cada vez más próximos a x_0, f(x) se acerca cada vez más a R.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = Q$, entonces, cuando **x** toma valores cada vez más próximos a x_0, g(x) se acerca cada vez más cercanos a Q.

Luego, cuando **x** toma valores cada vez más cercanos a x_0, resulta que f(x) . g(x) toma valores cada vez más próximos a R . Q. Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = R \cdot Q = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)] \cdot [\lim\limits_{x\to x_0} g(x)]$

c. Utilizando un razonamiento similar al empleado en el ítem **b.**, si $Q \neq 0$, entonces:

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ toma valores cada vez más próximos a $\dfrac{R}{Q}$, cuando **x** tiende a x_0. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{R}{Q} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

12. **a.** $\dfrac{a^4 b}{c}$ **b.** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{c}}$ **c.** $a + b - 2c$

p | **25**

13. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, entonces, cuando **x** tiende a x_0, f(x) toma valores cada vez más grandes (mayores que 1). Luego, si $n \in \mathbb{R}^+$, $[f(x)]^n$ tomará también valores cada vez más grandes cuando **x** tienda a x_0. O sea: $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = +\infty$. Si $n \in \mathbb{R}^-$, es decir, $n < 0$, entonces: $[f(x)]^n = \dfrac{1}{[f(x)]^{-n}}$ y $-n > 0$; por lo tanto, $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{-n} = +\infty$ y, en consecuencia, $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = 0$.

14. **a.** ∞ **b.** ∞

p | **26**

15. Utilizando la propiedad del límite de una división y lo demostrado en el "Algo más..." de la página 25, resulta:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ siempre que}$$

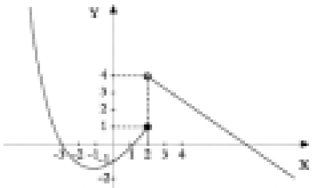
$\lim_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$.

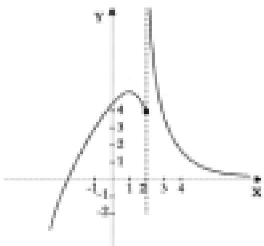
16. **a.** Existe y es igual a 0. **c.** No existe.
b. No existe. **d.** Existe y es igual a 0.

Guía de ejercitación

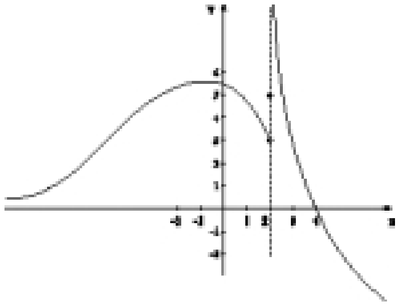
1. **a.** 1, 1, −2, no existe.
b. 5, 5, 5, 5
c. No existe, $+\infty$, $-\infty$, ∞.
d. No existe, 0, 0, 0.
e. −2, 5, −2, no existe.

2. Por ejemplo:



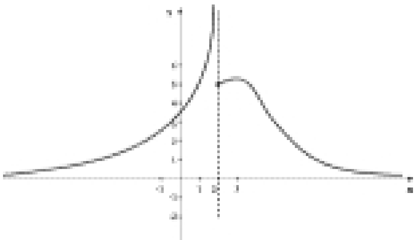


3. Por ejemplo:

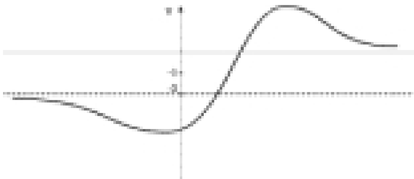


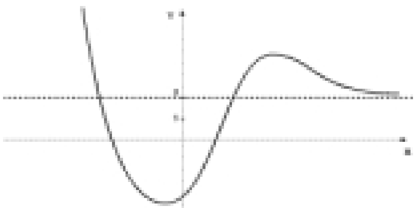
p | **28**

4. Por ejemplo:

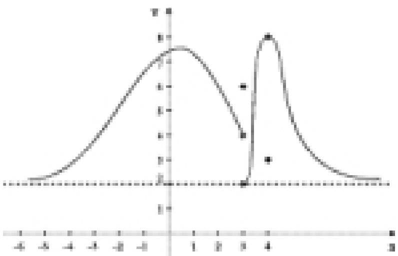


5. Por ejemplo:





6. Por ejemplo:



7. **a.** $\dfrac{n}{p}$ **b.** $\dfrac{m}{\sqrt[3]{n}}$ **c.** $5m + 4n - 2p$

p | **29**

d. $\dfrac{p^5 n}{m}$ **e.** m^p

8. **a.** Falsa, porque, por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ y $g(x) = -\lim_{x\to x_0}$, entonces, $\lim_{x\to 3}[f(x) + g(x)] = 0$ y $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} g(x) = \infty$.

b. Verdadera, pues
$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x) - f(x)] =$
$= \lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] - \lim_{x\to x_0} f(x)$, cuyo resultado es un número real.

c. Falsa, ya que, por ejemplo, si $f(x) = x$, y $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, entonces, $\lim_{x\to 0}[f(x) \cdot g(x)] = 0$,

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, pero $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe.

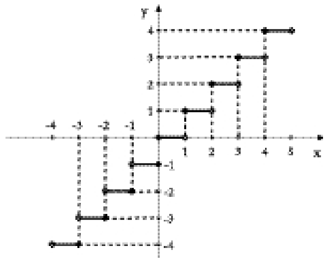
d. Verdadera, porque

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) \cdot g(x)}{f(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)]}{\lim_{x\to x_0} f(x)},$$

cuyo resultado es un número real.

p | **30**

9.



a. 0
b. −3
c. No es posible, pues no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$.
d. No es posible, ya que $\lim_{x\to -5} f(x)$ no existe.
e. No es posible, porque no existe $\lim_{x\to n} f(x)$, con $n \in \mathbb{Z}$.
f. $[x_0]$

10. **a.** Converge, pues $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$.
b. Diverge, porque $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 + 1 = \infty$.
c. Converge, ya que $c_n = 1$ para cualquier valor natural de **n**.
d. Converge, pues $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$.

11. Utilizando las propiedades del álgebra de límites, resulta $a = \dfrac{35}{4}$ y $b = \dfrac{5}{4}$.

p | **31**

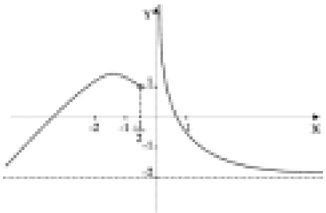
12. **a.** $a \cdot b$ **b.** a^b
c. $\dfrac{a}{b}$ **d.** $8a + 3b^2$
e. Si $0 < a < 1$, entonces, $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^x = 0$. Si $a > 1$, entonces, $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^x = +\infty$.
f. 1 **g.** $\dfrac{a+b}{3}$ **h.** $\dfrac{a-b}{b}$

13. a = 0; b = – 2 o b =2.

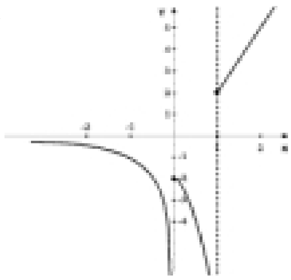
p | **32**

14. No existe, pues una función no puede tender a dos valores distintos cuando x tiende a +∞.

15.



16. **a.**



b. **i.** –2 y –∞. **iii.** +∞ y 0.
ii. 2 y –∞.

Capítulo 2

p | **37**

1. **a.** –8 **c.** ∞ **e.** $3\sqrt{2}$ **g.** ∞
b. ∞ **d.** $\frac{177}{199}$ **f.** 0

p | **38**

2. **a.** 0 **c.** 0 **e.** 0
b. 0 **d.** +∞ **f.** +∞

p | **39**

3. **a.** 0 **c.** 0 **e.** 0
b. 0 **d.** 0 **f.** 0

p | **38**

4. **a.** +∞ **c.** +∞ **e.** +∞ **g.** 1
b. 2 **d.** –3 **f.** 0

p | **41**

5. **a.** 0 **c.** +∞ **e.** 0
b. +∞ **d.** +∞ **f.** 0

p | **42**

6. **a.** –∞
b. No existe, porque el dominio de la función es (3; +∞).
c. +∞ **d.** +∞ **e.** –∞
f. +∞ **g.** –∞ **h.** –∞
i. No existe, pues el dominio de la función es (3; +∞).

p | **43**

7. **a.** Por la conclusión 7 de la página 43 del libro, el límite está, en principio, indeterminado.
b. 0 **c.** ∞
d. El límite está, en principio, indeterminado debido a la conclusión 7 de la página 43 del libro.
e. $\frac{2-\sqrt{2}}{20}$

p | **44**

8. **a.** $\frac{28}{13}$ **b.** $\frac{22}{39}$ **c.** $3x^2$

9. Sí, siempre es posible, pues si el numeador y el denominador tienden a cero cuando **x** tiende a x_0, entonces, x_0 es raíz del numerador y del denominador; por lo tanto, ambos tienen como factor a $x - x_0$ en su forma factoreada.

p | **45**

10. **a.** $\frac{1}{48}$ **b.** 0 **c.** –24 **d.** 0 **e.** +∞

p | **46**

11. **a.** $\frac{8}{3}$ **b.** 0 **c.** $-\frac{6}{11}$ **d.** $\frac{24}{7}$

p | **48**

12. **a.** 0 **b.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **c.** $\sqrt{7}$

13. No es cierto, pues si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces, ambos límites son iguales a cero.

p | **50**

14. **a.** e^2 **b.** +∞ **c.** $e^{-\frac{2}{7}}$ **d.** 1

15. Si $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = e^k$$

p | **52**

16. **a.** 1 **b.** $\frac{5}{4}$ **c.** 0 **d.** $\frac{1}{2}$ **e.** $\frac{1}{5}$

Guía de ejercitación

1. a. **i.** 107
ii. No es posible calcular el límite, porque su resultado depende de si $h(x) \to -\infty$ o $h(x) \to +\infty$. En el primer caso, el límite es 0 y, en el segundo, es +∞.
iii. El límite es indeterminado y no es posible determinarlo con los datos que figuran en el enunciado de la actividad.
b. **i.** Falsa, pues utilizando los datos del enunciado no se puede determinar si el resultado del límite es +∞ o –∞.
ii. Falsa, porque con los datos brindados en el enunciado sólo es posible afirmar que el límite es indeterminado.
iii. Verdadera, ya que

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{1}{f(x)-5}+\frac{1}{[f(x)]^2-25}\right| = \lim_{x\to 2}\left|\frac{f(x)+5+1}{[f(x)]^2-25}\right| =$$
$$= +\infty$$

2. **a.** +∞ **b.** +∞
c. El límite es indeterminado debido a la conclusión 9 de la página 47 del libro.
d. +∞ **e.** –∞ **f.** 0
g. Por la conclusión 8 de la página 46 del libro, el límite es indeterminado.
h. ∞ **i.** 0
j. El límite es indeterminado en virtud de la conclusión 7 de la página 43 del libro.
k. 0 **l.** +∞ **m.** 1
n. +∞ **o.** 0 **p.** 1

3. **a.** $a = -\frac{1}{5}$ **b.** $a = \frac{5}{2}$ **c.** a = 1

4. **a.** Verdadera, porque cuando **x** toma valores cada vez más próximos a 1, la función 5x – 3 toma valores cada vez más cercanos a 2.
b. Falsa, pues $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 3 = \infty$.
c. Falsa, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$.
d. Verdadera, porque cuando **x** tiende a 8, la función $\sqrt[3]{x}$ tiende a 2.
e. Falsa, pues al salvar la indeterminación, el resultado del límite es 12.
f. Verdadera, ya que una vez salvada la indeterminación, el límite es igual a $\frac{1}{8}$.

5. **a.** Cuando **x** tiende a cero, la función $\frac{1}{x}$ tiende a infinito. Luego, realizando un análisis similar al utilizado en el ítem **a.** del problema 6 de la página 25 del libro, obtenemos que $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ no existe.
b. ∞
c. No existe, pues no existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.
d. 0
e. No existe, ya que $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = -1$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = 1$.

6. **a.** $\frac{5}{9}$ **c.** $\sqrt{8}$ **f.** 0 **i.** ∞
d. ∞ **g.** ∞ **j.** 0
b. $\frac{1}{4}$ **e.** ∞ **h.** +∞

p | **58**

k. ∞ **m.** $-\frac{2}{13}$ **o.** 6 **q.** e^2
l. 6 **n.** +∞ **p.** ∞

Capítulo 3

p | **63**

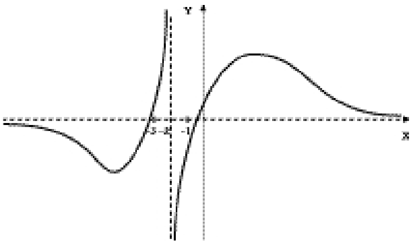
1. **a.** 170 cm. **b.** Nunca.

p | **64**

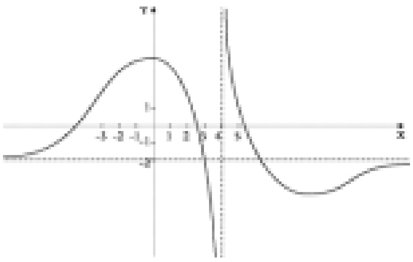
2. **a.** x = 5 e y = 10.
b. No existe asíntota vertical ni horizontal.
c. x = 3, y = 0, cuando x→ –∞ e y =7, cuando x→ +∞.

p | **65**

3. Por ejemplo:

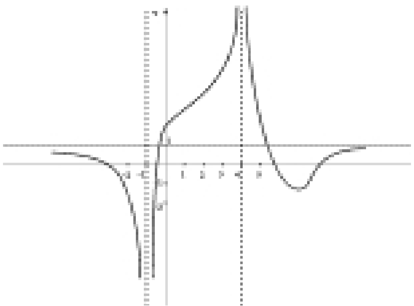


4. Por ejemplo:



p | **66**

5. Por ejemplo:



6. **a.** $x = 0$ e $y = 0$. **d.** $x = 6$ e $y = 2$.
b. $x = -5$ e $y = 0$. **e.** $x = 3$ e $y = -5$.
c. $x = -\frac{4}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$.

p | **67**

7. $x = -3$, $y = -1$, cuando $x \to -\infty$ e $y = 1$, cuando $x \to +\infty$.

8. Por ejemplo: $f(x) = \frac{-x}{x+1}$, pues $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)} = -1$

p | **68**

9. **a.** $x = -1$, $x = 2$ e $y = 0$. **b.** $x = -2$ e $y = 0$.
c. $y = 0$. No existe asíntota vertical.

10. La función f(x) corta a su asíntota horizontal en el punto (–2; 0), la función h(x) no corta a ninguna de sus asíntotas y la función g(x) corta a su asíntota horizontal en el punto (0; 0).

p | **69**

11. Por ejemplo:

$f(x) = \frac{2\,.\,\sqrt{x^2+3}}{x+2}$, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2\,.\,\sqrt{x^2+3}}{x+2} = -2$ y

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\,.\,\sqrt{x^2+3}}{x+2} = 2.$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-32x^2}{16x^2+8} & \text{si } x \le 0 \\ \frac{2x}{x-3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

porque $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-32x^2}{16x^2+8} = -2$

y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-3} = 2.$

12. Por ejemplo:

$h(x) = \frac{-2x}{x-2}$, pues $\lim\limits_{x\to2} \frac{-2x}{x-2} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x}{x-2} = -2.$

$i(x) = \frac{-2x^2+1}{x^2-4}$, porque $\lim\limits_{x\to2} \frac{-2x^2+1}{x^2-4} = \infty$ y

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^2+1}{x^2-4} = -2$

p | **70**

13. Por ejemplo:

$j(x) = \frac{x+3}{3x^2-3x-6}$, pues $\lim\limits_{x\to2} \frac{x+3}{3x^2-3x-6} = \infty,$

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+3}{3x^2-3x-6} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{3x^2-3x-6} = 0.$

$k(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$, pues $\lim\limits_{x\to2} \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \infty,$

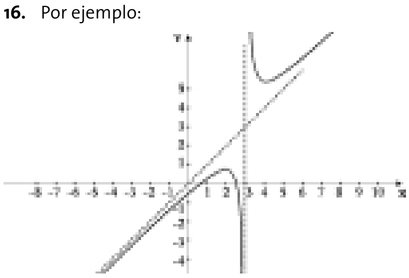
$\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{(x-2)(x+1)} = 0.$

14. **a.** No existe asíntota vertical ni horizontal.
b. $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$. **c.** $x = 2$ e $y = 0$.

p | **71**

15. **a.** Verdadera; por ejemplo, la función i(x) del problema 3 de la página 65 del libro.
b. Falsa porque no se trataría de una función, ya que a un mismo valor de **x** le corresponderían varios valores de **y**.
c. Verdadera; por ejemplo, la función g(x) del problema 3 de la página 65 del libro.
d. Falsa, pues no se trataría de una función por el mismo motivo que en el ítem **b.**

16. Por ejemplo:



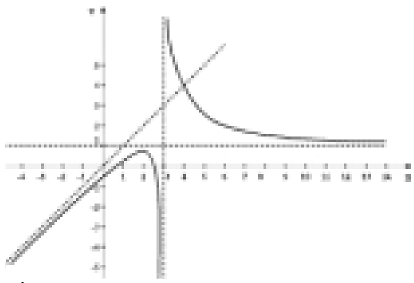
p | **72**

17. **a.** Falsa, porque la asíntota oblicua no es $y = 0$, sino $y = x + 3$.
b. Verdadera, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$.
c. Falsa, pues Dom i = ℝ.
d. Verdadera, porque $j(x) = 3$ para todo $x \neq -2$.

p | **73**

18. **a.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. No existe asíntota vertical ni horizontal.
b. $x = 0$. No hay asíntota horizontal ni oblicua.
c. $x = 3$ e $y = x + 6$. No existe asíntota horizontal.

19. Como la asíntota horizontal es una asíntota oblicua con pendiente nula, una función no puede tener una asíntota horizontal y otra oblicua simultáneamente para **x** tendiendo a $-\infty$, o simultáneamente para **x** tendiendo a $+\infty$. Lo que sí puede suceder es que una función tenga una de dichas asíntotas cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$. Por ejemplo:



p | **75**

20. **a.** $x = 1$ desde la derecha. No hay asíntota horizontal ni oblicua.
b. $x = -3$ desde la derecha. No existe asíntota horizontal ni oblicua.
c. $y = 0$. No hay asíntota vertical ni oblicua.

21. **a.** $y = 2$ cuando $x \to -\infty$. No hay asíntota vertical.
b. $y = 1$ cuando $x \to +\infty$. No hay asíntota vertical.

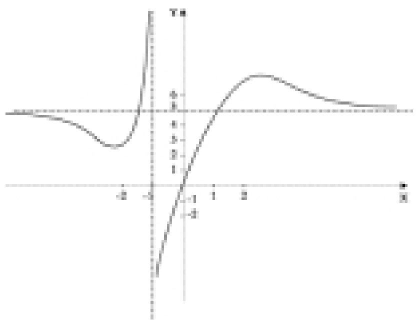
p | **76**

22. **a.** $y = 5$ cuando $x \to -\infty$. No existe asíntota vertical.
b. $y = 4$ cuando $x \to +\infty$. No hay asíntota vertical.
c. $x = 0$ desde la izquierda e $y = 1$.
d. $x = 0$ desde la derecha. No existe asíntota horizontal.
e. $x = -1$ desde la derecha. No hay asíntota horizontal.
f. $x = 1$ desde la derecha. No existe asíntota horizontal.
g. $x = -1$ desde la izquierda y $x = 1$ desde la derecha. No hay asíntota horizontal.

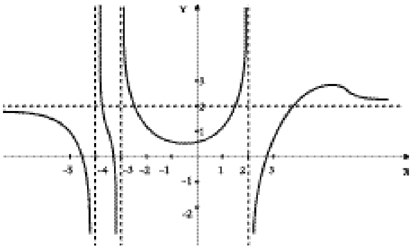
Guía de ejercitación

1. **a.** $y = 0$ **c.** $x = 0$ e $y = x$.
b. $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$. **d.** $x = 1$ e $y = 2$.

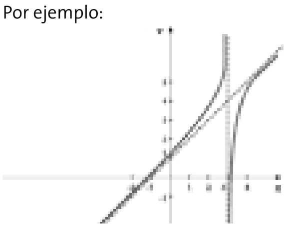
2. Por ejemplo:



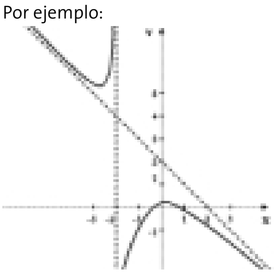
3. Por ejemplo:



4. Por ejemplo:



5. Por ejemplo:



6. **a.** x = 3 e y = 5. No hay asíntota oblicua.
b. x = –3, x = 3 e y = 0. No existe asíntota oblicua.
c. x = 0, x = 1 e y = 0. No hay asíntota oblicua.
d. x = 9 e y = 0. No existe asíntota oblicua.
e. x = 1 e y = 0. No hay asíntota oblicua.
f. y = 0,5x. No existe asíntota vertical ni horizontal.
g. y = 0. No hay asíntota vertical ni oblicua.
h. No existen asíntotas.
i. y = 0. No hay asíntota vertical ni oblicua.
j. x = 1 e y = 0. No existe asíntota oblicua.

7. **a.** x = 1 desde la derecha. No hay asíntota horizontal.
b. y = 6 cuando $x \to -\infty$. No existe asíntota vertical.
c. y = –2 cuando $x \to +\infty$. No hay asíntota vertical.
d. x = 4 desde la derecha. No existe asíntota horizontal.
e. x = 0 por la derecha. No hay asíntota horizontal.
f. y = –3 cuando $x \to -\infty$. No existe asíntota vertical.
g. y = –7 cuando $x \to +\infty$. No hay asíntota vertical.
h. x = 0 desde la izquierda. No existe asíntota horizontal.

8. **a.** a = b = 4 , pues para estos valores $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \infty$. La solución es única.
b. a ∈ ℝ y b = 0, porque así f(x) es una función lineal. Hay infinitas soluciones.
c. a ∈ ℝ y b = –2, ya que en este caso $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$. Existen infinitas soluciones.
d. a = 3b, con b ∈ ℝ, pues con esa relación resulta que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$. Hay infinitas soluciones.

9. **a.** No existen valores de **k**, porque nunca es $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$.
b. k = 3, ya que para este valor se obtiene que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - x] = -3$. La solución es única.

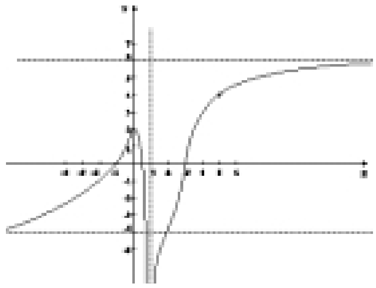
10. **a.** No existen valores de **k** ni de **h** pues nunca es $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
b. k = 2 y h ∈ ℝ porque así resulta que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$. Hay infinitas soluciones.

11. **a. II.** **b. I.**

12. $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$

13. **a.** Falsa, porque la función tiene una única asíntota vertical que es x = 3.
b. Falsa, pues y = 3 es la asíntota horizontal de la función.

14.



Capítulo 4

p | **87**

1. **a.** f(a) **b.** y_1 **c.** f(a)

2. **a.** f(a) **b.** f(a)

p | **88**

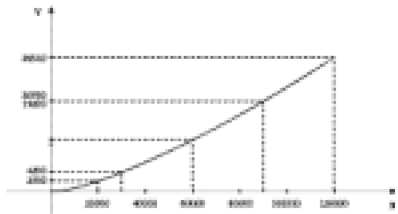
3. **a.** La función es continua.
b. La función es discontinua en 2, porque 2 no pertenece al dominio.
c. La función es discontinua en 3, pues no existe el límite de la función cuando x tiende a 3.

p | **89**

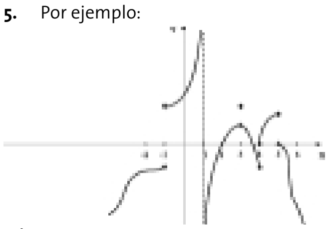
4. La fórmula de la función es

$$f(x) = \begin{cases} 0,09 \,.\, x & \text{si } 0 < x < 10000 \\ 900 + (x - 10000) \,.\, 0,14 & \text{si } 10000 \le x < 20000 \\ 2300 + (x - 20000) \,.\, 0,19 & \text{si } 20000 \le x < 20000 \\ 4200 + (x - 30000) \,.\, 0,23 & \text{si } 30000 \le x < 60000 \\ 11100 + (x - 60000) \,.\, 0,27 & \text{si } 60000 \le x < 90000 \\ 19200 + (x - 90000) \,.\, 0,31 & \text{si } 90000 \le x < 120000 \\ 28500 + (x - 120000) \,.\, 0,35 & \text{si } x \ge 120000 \end{cases}$$

El gráfico de f(x), que figura a continuación, indica que es continua.



5. Por ejemplo:



p | **89**

6. Por ejemplo, las siguientes funciones f(x) y g(x).

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \le -8 \\ x + 2 & \text{si } -8 < x \le 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función f(x) es discontinua en –8 y en 0, pues $\lim\limits_{x\to-8} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existen, y es discontinua en 2, porque 2 ∉ Dom f.

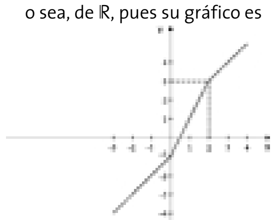
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ x + 2 & \text{si } -1 < x \le 0 \\ x & \text{si } x \le -1 \end{cases}$$

La función g(x) es discontinua en – 1 y en 0, pues no existe $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, y es discontinua en 1, porque 1 ∉ Dom g.

7. Por ejemplo, la función

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

es continua en cualquier valor de su dominio, o sea, de ℝ, pues su gráfico es



8. **1.** **a.** La función es continua en cualquier valor de su dominio.
b. La discontinuidad es evitable.
c. La discontinuidad es esencial de primera especie con salto finito.

2. **a.** La discontinuidad es esencial de primera especie con salto finito.
b. La discontinuidad es esencial de primera especie con salto infinito.

3. **a.** La función es continua en cualquier valor de su dominio.
b. La discontinuidad es evitable.
c. La discontinuidad es esencial con salto finito.

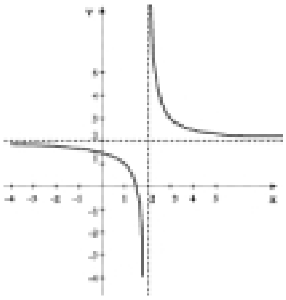
5. Para la función cuyo gráfico figura como respuesta a la actividad **5.**, en –1, en 4 y en 5 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto finito, en 1 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto infinito y en 3 la discontinuidad es evitable.

6. Considerando las funciones propuestas como respuesta a la actividad **6.**, resulta:
Para f(x): en – 8, en 0 y en 2 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto finito.

Para g(x): en –1 y en 0 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto finito y en 1 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto infinito.

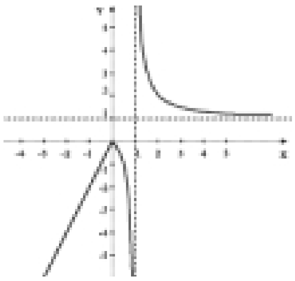
p | **91**

9.



La función f(x) es discontinua esencial de primera especie con salto infinito en 2 y continua en 5.

10.



La función g(x) es continua en 0 y discontinua esencial de primera especie con salto infinito en 1.

p | **92**

11. **a.** La función f(x) es continua en –3 y discontinua esencial de primera especie con salto finito en 2.
b. La función g(x) es continua en 3 y en 7, y discontinua esencial de primera especie con salto finito en 4.

12. **a.** $a = \frac{31}{4}$

b. En –1 la función f(x) no es continua.

p | **93**

13. **a.** $a = \frac{19}{6}$ y $b = \frac{10}{3}$

b. $a + b = \frac{1}{3}$

c. $a = \frac{2}{3}$ y $b = 0$

p | **94**

14. Por ejemplo:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{x} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x-5}{x^2-12x+35} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

El dominio de la función es Dom f = ℝ – {0; 5; 7}. En 0 y en 7 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto infinito, pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 7} f(x) = \infty$. En 1 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto finito debido a que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{6}$. En 5 la discontinuidad es evitable, porque $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -\frac{1}{2}$.

15. a. i. Dom f = ℝ
ii. No existen valores de **x** en los cuales la función sea discontinua.
b. i. Dom g = ℝ – {–3; 2}
ii. –3 y 2
iii. En –3 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto infinito y en 2 la discontinuidad es evitable.
c. i. Dom h = (–∞; –1] U [1; +∞)
ii. No existen valores de **x** en los cuales la función sea discontinua.

p | **95**

16. **a.** La función j(x) es continua en cualquier valor de su dominio, siendo Dom j = (0; 1).
b. Como Dom m = ℝ la función m(x) es continua en cualquier valor de su dominio.
c. En 1 la discontinuidad es evitable.
d. En 1 la discontinuidad es evitable.
e. En –2 la discontinuidad es esencial de primera especie con salto infinito.

p | **96**

17. Si f(x) y g(x) son funciones continuas en x_0, entonces, existen $f(x_0)$ y $g(x_0)$ y además $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Luego, resulta:

a. $\lim\limits_{x\to x_0} (f - g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] =$
$= \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) - g(x_0) = (f - g)(x_0)$

b. $\lim\limits_{x\to x_0} (f \,.\, g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \,.\, g(x)] =$
$= \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \,.\, g(x_0) = (f \,.\, g)(x_0)$

c. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \underset{\text{como } g(x_0) \neq 0}{=} \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$
$= \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$

p | **98**

18. Por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{4-x}$.

Cualquiera sea la función propuesta como respuesta a la actividad **18.**, dicha función no puede ser continua en todo su dominio, pues ello contradiría el corolario del Teorema de Bolzano.

19. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Esta función no es continua en 1. La función no contradice el corolario del Teorema de Bolzano, porque en él se enuncia que si la función es continua en un intervalo [a; b] y f(a) y f(b) tienen distinto signo, existe por lo menos un número **c** entre **a** y **b** para el cual es f(c) = 0. Sin embargo, no es cierto el teorema recíproco de este corolario.

p | **100**

20. **a.** La temperatura fue positiva en [0; 5) U (11; 19).
b. Sí, la temperatura fue de 15 °C entre las 0 y 2 horas y entre las 2 y 4 horas.
La temperatura nunca fue de –15 °C.

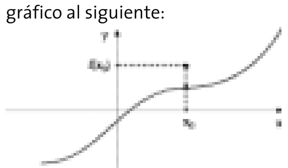
21. $C^+ = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$, $C^- = (-1; 1) \cup \left(-1; \frac{8}{3}\right)$ y $C^0 = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

Guía de ejercitación

1. **a.** La función es continua en **a** y en **b**.
b. La función es continua en **b** y discontinua esencial de primera especie con salto infinito en **a**.
c. La función es continua en **b** y discontinua esencial de primera especie con salto finito en **a**.
d. La función es continua en **b** y discontinua evitable en **a**.
e. La función es discontinua esencial de primera especie con salto infinito en **a** y en **b**.
f. La función es discontinua esencial de primera especie con salto finito en **a** y en **b**.

2. **a.** f(x) es continua en $x_0 = 1$ y en $x_0 = 3$.
b. g(x) es discontinua esencial de primera especie con salto infinito en $x_0 = 1$ y continua en $x_0 = 3$.
c. h(x) es discontinua esencial de primera especie con salto finito en $x_0 = 1$ y continua en $x_0 = 3$.
d. i(x) es discontinua esencial de primera especie con salto infinito en $x_0 = 1$ y discontinua esencial de primera especie con salto finito en $x_0 = 3$.
e. j(x) es discontinua esencial de primera especie con salto infinito en $x_0 = 1$ y discontinua evitable en $x_0 = 3$.
f. k(x) es discontinua esencial de segunda especie en $x_0 = 1$ y continua en $x_0 = 3$.
g. l(x) es discontinua evitable en $x_0 = 1$ y continua en $x_0 = 3$.
h. m(x) es discontinua esencial de primera especie con salto infinito en $x_0 = 1$ y continua en $x_0 = 3$.

3. **a.** Verdadera, por ser una de las condiciones que debe satisfacer la función f(x) para ser continua en x_0.
b. Falsa; por ejemplo, la función cuyo gráfico figura en el ítem **c.** de la actividad 1 de la página 101.
c. Falsa; por ejemplo, la función que tiene como gráfico al representado en el ítem **d.** de la actividad **1.** de la página 101.
d. Verdadera, por la definición de discontinuidad esencial.
e. Falsa; por ejemplo, la función cuyo gráfico figura en el ítem **d.** de la actividad **1.** de la página 101.
f. Falsa; por ejemplo, la función que tiene como gráfico al siguiente:

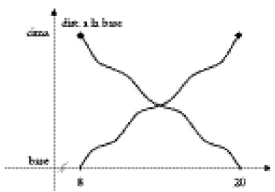


4. **a.** f(x) es discontinua evitable en 2 y en –3 y discontinua esencial de primera especie con salto infinito en 1.
b. g(x) es continua en ℝ.
c. h(x) es discontinua esencial de primera especie con salto infinito en 0.
d. i(x) es continua en cualquier valor de su dominio, que es Dom i = (–∞; –1) U (0; +∞).

5. **a.** La función f(x) es continua en todo su dominio, o sea, en ℝ.
b. La función h(x) es discontinua esencial de primera especie con salto finito en –1 y en 0.
c. La función j(x) es continua en todo su dominio, o sea, en ℝ.

6. En –2, 1 y en 2 la función f(x) tiene una discontinuidad evitable. Para que dicha función sea continua en los valores del intervalo [–4; 2], se la debe redefinir de la siguiente manera:
$f(-2) = \frac{1}{4}$, $f(1) = 1$ y $f(2) = -5$.

7. Sí, es posible, porque al realizar, en un mismo sistema de ejes coordenados, los dos gráficos que representan, para el ascenso y el descenso, la distancia a la base en función del tiempo, observamos un punto de intersección entre dichos gráficos. Este punto indica que a la misma hora los montañistas se encontraban en el mismo lugar el día anterior. Esto se debe a que las correspondientes funciones son continuas en cualquier valor de sus respectivos dominios.



8. a = 0 y b = 5.

9. Sí, porque como $x_0 \neq x_1$ siempre es posible unir los puntos $(x_0; f(x_0))$ y $(x_1; g(x_1))$ por medio de una recta.

10. La función f(x) es continua en 3 si se define

$f(3) = \frac{2}{3}$, pero no es posible que sea continua

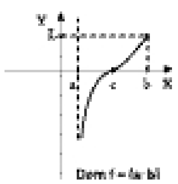
en ℝ pues $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$.

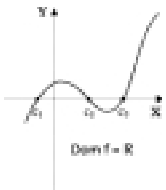
11. No se puede, debido a que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

12. No puede asegurarse que exista un número **c** entre 2 y 4, tal que f(c) = 0, porque f(x) no es continua en 3.

13. Por ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{6-x}$.

14. Los tres enunciados se cumplen.





15. No lo contradice, porque f(x) no es continua en 0, que es un valor entre –1 y 1.

16. Como $f(x) = \ln x + 5x^3 + \sqrt{x^2 + 8}$ es continua en $(0; 1]$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 8$, entonces, existe por lo menos un número **c** entre 0 y 1 tal que f(c) = 2.

Libro 6 Capítulo 1

p | **13**

1. **a.** Daniel recorrió el trayecto en tres etapas y en cada una de ellas viajó a velocidad constante.
b. La velocidad a la que viajó Daniel no es constante, pues para distintos intervalos de tiempo recorrió diferentes distancias.

2. **a.** $Vm_{0;3} = \frac{80}{3}$ km/h **b.** $Vm_{0;3} = \frac{80}{3}$ km/h

p | **14**

3. La velocidad media durante todo el viaje fue, aproximadamente, 87,89 km/h. La velocidad media durante los primeros dos tramos fue, aproximadamente, 71,43 km/h.

4. **a.** $Vm_{1;2} = 20$ km/h **d.** $Vm_{1;1,2} = 18,4$ km/h
b. $Vm_{1;1,5} = 19$ km/h **e.** $Vm_{1;1,15} = 18,3$ km/h
c. $Vm_{1;1,3} = 18,6$ km/h **f.** $Vm_{1;b} = \frac{2b^2 + 14b - 16}{b - 1}$

p | **15**

5. $Vi(5) = 50$ m/seg

6. **a.** $Vm_{1;3} = 16$ km/h **c.** $Vi(3) = 14$ km/h
b. $Vi(1) = 18$ km/h **d.** $Vi(1,5) = 17$ km/h

p | **18**

7. **a.** $f'(2) = 3$ **b.** $g'(1) = 6$ **c.** $h'(x) = \frac{1}{4}$

8. $y = 40x - 97$

9. **a.** No existe **a**, porque para cualquier valor de **a**, el límite del cociente incremental, cuando **h** tiende a **a,** es un número real.
b. $a = -4$, pues $h'(a) = -\frac{1}{(a+1)^2} = -\frac{1}{9}$.

p | **19**

10. **a.** f(x) es derivable en 1, pues

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)^3 + 2 - (1^3 + 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + 3h + 3h^3 + h^3 - \cancel{1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3 + 3h + h^2)}{\cancel{h}} = 3$$

b. g(x) no es derivable en –1, porque $-1 \notin$ Dom g.

p | **20**

11. **a.** f(x) es derivable en –2, pues

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = -1.$$

b. f(x) es derivable en 5, porque

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 1.$$

c. f(x) es derivable en –3, pues

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = 1.$$

12. En **a** no existe la derivada de f(x), porque $a \notin$ Dom f. En **b** la función no es derivable, debido a que no es continua en ese valor. En **c** no existe la derivada de f(x), pues **c** es la abscisa de un punto anguloso. En **d** y en **e,** la función es derivable.

p | **21**

13. **a.** Verdadera, por la segunda conclusión de la página 20 del libro.
b. Falsa, pues $\lim_{h \to 0} \frac{|-2 + h + 2| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ y este límite no existe.
c. Verdadera, porque h(x) no es derivable en –5 y $-5 \notin$ Dom h.

p | **24**

14. **a.** $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \cos x$ **c.** $h'(x) = \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
b. $g'(x) = \frac{1}{x} + 3x^2$

p | **26**

15. **a.** $a'(x) = 9 \,.\, (3x+2)^2$ **e.** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$
b. $b'(x) = 2 \,.\, (2x-3)^{-1}$ **f.** $f'(x) = -2 \,.\, (2x+3)^{-2}$
c. $c'(x) = -3 \,.\, (\cos^2 x) \,.\, \operatorname{sen} x$
d. $d'(x) = -3 \,.\, x^2 \,.\, \operatorname{sen} x^3$ **g.** $f'(x) = -6 \,.\, (2x+3)^{-4}$

p | **27**

16. **a.** $h'(x) = \cos x \,.\, \ln x + \operatorname{sen} x \,.\, x^{-1}$
b. $i'(x) = (3x^2 + 5) \,.\, \operatorname{sen} x + (x^3 + 5x) \,.\, \cos x$
c. $j'(x) = \frac{x \,.\, \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$
d. $k'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
e. $l'(x) = [\cos x \,.\, (x^3 + 5x) - \operatorname{sen} x \,.\, (3x^2 + 5)] \,.\, (x^3 + 5x)^{-2}$
f. $m'(x) = [x^{-1} \operatorname{sen} 2x - 2 \,.\, \ln x \,.\, \cos 2x] \operatorname{sen}^{-2} 2x$

p | **28**

17. **a.** $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = 1$

b. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} -\operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \,.\, \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -\operatorname{sen} x$$

18. Si $f(x) = a^x = e^{(\ln a) \,.\, x}$, entonces, $f'(x) = e^{(\ln a) \,.\, x} \,.\, \ln a = [e^{(\ln a)}]^x \,.\, \ln a = a^x \,.\, \ln a$.

p | **29**

19. **a.** $a'(x) = \frac{x \,.\, e^x - 5 \,.\, e^x}{x^6}$ **d.** $d'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{3 \,.\, \sqrt[3]{\cos^2 x}}$
b. $b'(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x) \,.\, \ln 5}$ **e.** $e'(x) = -\frac{x+2}{x+3} \,.\, \frac{1}{2 \,.\, (x+2)^2}$
c. $c'(x) = -\frac{-3x - 10}{4(x+2)^3}$ **f.** $f'(x) = \cos^{-2} x$

p | **30**

20. **a.** $f'(x) = 5x^4 + 12x^3$, $f''(x) = 20x^3 + 36x^2$, $f'''(x) = 60x^2 + 72x$ y Dom f = Dom f' = = Dom f'' = Dom f''' = $\mathbb{R}$.
b. $g'(x) = g''(x) = g'''(x) = e^x$ y Dom g = Dom g'= = Dom g'' = Dom g''' = $\mathbb{R}$.
c. $h'(x) = x^{-1}$, $h''(x) = -x^{-2}$, $h'''(x) = x^{-3}$ y Dom h = Dom h' = Dom h'' = Dom h''' = $(0; +\infty)$.
d. $i'(x) = \cos x$, $i''(x) = -\operatorname{sen} x$, $i'''(x) = -\cos x$ y Dom i = Dom i' = Dom i'' = Dom i''' = $\mathbb{R}$.

p | **31**

21. sen 46° ≅ 0,719448122
22. $\sqrt[3]{64{,}95} \cong 4{,}019791667$
23. ln3 ≅ 1,103638324

p | **32**

24. $f'(x) = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$, y $f''(x) = \frac{-3 \,.\, (2x+1)}{[(x-1)(x+2)]^2}$ y
Dom f = Dom f' = Dom f'' = $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

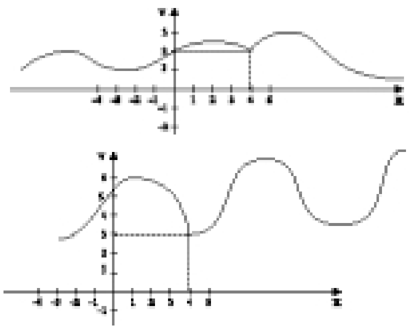
25. **a.** Como la función g(x) es la función compuesta de $h(x) = x^2 - 4$, que es derivable en 2, y f(x), que es derivable en h(2) = 0, entonces, g(x) es derivable en 2.
b. $g'(2) = 12$

Guía de ejercitación

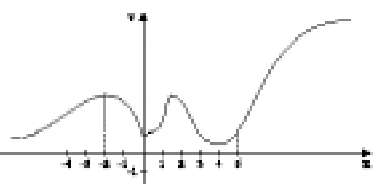
1. **a.** 26 $\frac{m}{seg}$
b. Sí, aproximadamente, a los 5,6 segundos.
c. A $\frac{1}{3}$ de segundo y a los 5 segundos.

2. La velocidad instantánea es positiva en $(0; 3) \cup (5; 9)$, negativa en $(3; 5) \cup (9; 11)$ y nula en {3; 9}.

3.



4.



5. **a.** (1; 2) y (–1; 4)
b. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}; 3 - \frac{20}{27}\sqrt{2}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}; 3 + \frac{20}{27}\sqrt{2}\right)$
c. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 3 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 3 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

6. No existe ningún punto, porque f '(x) es distinta de 0 para cualquier valor de **x**.

7. En el punto $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{275}{27}\right)$ y en el punto (–3; –9), pues $-\frac{5}{3}$ y –3 son los valores de **x** que anulan $f'(x) = 3x^2 + 14x + 15$.

8. $y = 3x - 2$

9. $f(1) = 5$ y $f'(1) = 2$.

10. $y = -x + 1$ e $y = -\frac{1}{25}x - \frac{7}{5}$.

11. $a = \frac{116}{289}$ y $b = -\frac{48}{289}$.

12. **a.** $a'(x) = -3.(x+4).(x^2-4)^{-2}$
b. $b'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 5$
c. $c'(x) = 3x.(\ln 3 . \operatorname{sen} x + \cos x)$
d. $d'(x) = 4 . e^{4x+5}$
e. $e'(x) = \sec^2 x - 2 . \ln x . x^{-1}$
f. $f'(x) = \dfrac{3 - 2 . e^x . (3x+5)}{2 . e^x . \sqrt{3x+5}}$
g. $g'(x) = \operatorname{sen}(3x^2 + 5x).(6x+5)$
h. $h'(x) = \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$
i. $i'(x) = \left[\cos x . \ln(2x+3) + \dfrac{2 \operatorname{sen} x}{2x+3}\right] . (2x+3)^{\operatorname{sen} x}$
j. $j'(x) = \left[2\ln(\operatorname{sen} x) + (2x+3)\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right] . (\operatorname{sen} x)^{2x+3}$

13. $4790 \ \dfrac{m}{seg^2}$

14. **a.** $a''(x) = 6.(x+3)$
b. $b''(x) = x^3 . \left(\frac{15}{4}x^5 - 20\right) . (x^5 - 5)^{-\frac{3}{2}}$
c. $c''(x) = -\operatorname{sen}(4x^4 + 6x^3).(16x^3 + 18x^2)^2 +$
$+ \cos(4x^4 + 6x^3).(48x^2 + 36x)$
d. $d''(x) = 2.(x+1)^3$

15. **a.** $a'(x) = -\dfrac{2 \operatorname{sen}(2x+3)}{\cos(2x+3)}$
b. $b'(x) = -2 . e^{\cos(2x+3)} . \operatorname{sen}(2x+3)$
c. $c'(x) = -2 . \cos[\cos(2x+3)] . \operatorname{sen}(2x+3)$

16. $\cos 31° \cong 0{,}857298756$

17. $\sqrt{145} \cong \dfrac{289}{24}$

18. $a = \frac{4}{3}$, $b = -1$, $c = 2$ y $d = 4$.

19. **a. II.**, pues $f'(1) = -e^{-2+1} = -e^{-1}$.
b. I., porque $f(1) = -\frac{9}{4}$ y $f'(1) = \frac{13}{4}$.

Capítulo 2

p | **43**

1. **a.** Dom f = ℝ – {2}
b. La función f(x) no es continua en 1 y en 2. En 1 tiene una discontinuidad esencial de primera especie con salto finito y en 2 posee una discontinuidad esencial de primera especie con salto infinito.
c. La función no es derivable en 1, en 2 y en 3.
d. Para x = – 1 .
e. La función f(x) no posee máximo relativo, y en x = –1 y en x = 3 tiene mínimos relativos.
f. La función es creciente en (–1; 2) U (3, +∞) y decreciente en (–∞; –1) U (2; 3).

p | **44**

2. **a.** f '(x) > 0 en (–∞; 1) U (2; 3).
b. f '(x) < 0 en (1; 2) U (5; +∞).
c. Las abscisas de los puntos estacionarios pertenecen a {2} U (3; 5].
d. En x = 1 y en x = 2 la función posee extremos relativos.

3. **a.** Falsa, pues f(x) es creciente en (2; +∞).
b. Verdadera, porque f(x) es decreciente en (–∞; 2) y creciente en (2; +∞).

p | **45**

4. **a.** f(x) crece en (–∞; 1) U (3; +∞), pues allí f '(x) > 0. f(x) decrece en (1; 3), porque allí f '(x) < 0.
b. En x = 1, la función alcanza un máximo relativo, debido a que en un entorno de 1 es f '(x) > 0 para valores de **x** menores que 1 y f '(x) < 0 para valores de **x** mayores que 1. En x = 3, la función alcanza un mínimo relativo, pues en un entorno de 3 f '(x) < 0 si x < 3 y f '(x) > 0 si x > 3.

5. Sí, es posible, pues f '(x) < 0 para cualquier valor de **x** en ℝ.

p | **46**

6. **a.** Dom f = ℝ . $C^+ = (2; +\infty)$ y $C^- = (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.
La función crece en (–∞; 0) U $\left(2\sqrt[3]{\frac{2}{5}}; +\infty\right)$ y decrece en $\left(0; 2\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)$, tiene un máximo relativo en x = 0 y un mínimo relativo en $x = 2\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.
b. Dom g = ℝ . $C^+ = ℝ - \{-1; 2\}$ y $C^- = \emptyset$. La función g(x) es creciente en $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ U (2 ; +∞) y decreciente en (–∞; –1) U $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, alcanza un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$ y mínimos relativos en x = –1 y en x = 2.
c. Dom h = ℝ . $C^+ = (-2; -1) \cup (1; +\infty)$ y $C^- = (-\infty; -2) \cup (-1; 1)$. La función h(x) crece en $\left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}; \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$, alcanza un máximo relativo en $x = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

p | **48**

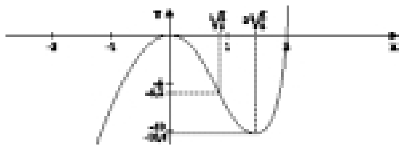
7. Sí, es posible, pues f '(x) < 0 en (2; 3) y f(x) decrece (2; 3), f '(x) > 0 en (–∞; 2) U (3; +∞) y f(x) crece en (–∞; 2) U (3; +∞). Como a la izquierda de 2 f(x) crece y a la derecha decrece en x = 2, debe haber un máximo relativo; además, f '(3) no existe y (3; f(3)) es un punto anguloso.

8. La función g(x) es decreciente en (–∞; 6) y es creciente en (6, +∞).

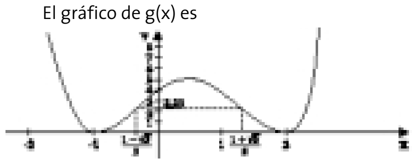
9. a = c = 12 y **b** es un número real cualquiera.

p | **49**

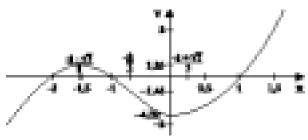
10. **a.** La función f(x) es cóncava hacia arriba en $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}; +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty; \sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)$.
La función g(x) es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.
La función h(x) es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.
b. El gráfico de f(x) es



El gráfico de g(x) es

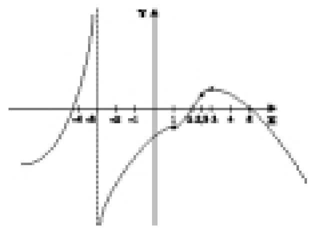


El gráfico de h(x) es



p | **50**

11.



12. La función h(x) es creciente en (0; 1) U (2; 3) y decrece en (1; 2) U (3; 4), en x = 1 y en x = 3 alcanza máximos relativos y en x = 0, x = 2 y x = 4 alcanza mínimos relativos.

p | **51**

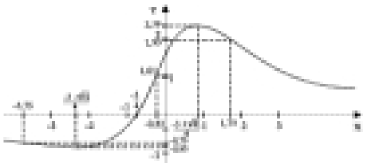
13. **a.** Dom g = ℝ
b. La recta y = 0 es asíntota horizontal. No existe asíntota vertical ni oblicua.

c. $C^0 = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$, $C^+ = \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$ y $C^- = \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$.

d. La función g(x) es creciente en $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{4}; \frac{-3+\sqrt{41}}{4}\right)$ y decreciente en $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{41}}{4}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$, tiene un máximo relativo en $x = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$.

e. La función es cóncava hacia arriba en $(-3{,}75; -0{,}23) \cup (1{,}727; +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty; -3{,}75) \cup (-0{,}23; 1{,}727)$.

f.



p | **52**

14. **a.** De 0 a 2, o sea, en el intervalo (0; 2), pues en ese período de tiempo la aceleración del móvil es negativa.
b. Después de 2, es decir, en el intervalo $(2; +\infty)$, porque en ese período de tiempo la aceleración es positiva

15. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una función polinómica de grado 3, entonces, debe ser $a \neq 0$. Luego, resulta: $f'(x) = 3ax^2 + bx + c$ y $f''(x) = 6ax + b$. La función $f''(x)$ cuya raíz es $-\frac{b}{6a}$ es una función lineal, es decir, su gráfico es una recta.
Si $a > 0$, la función $f''(x)$ es creciente, con lo cual $f''(x)$ es negativa para valores de **x** menores que $-\frac{b}{6a}$ y positiva para valores de **x** mayores que $-\frac{b}{6a}$. Entonces, la función f(x) es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty; -\frac{b}{6a}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{b}{6a}; +\infty\right)$. Por lo tanto, si $a > 0$, el único punto de inflexión de f(x) es $\left(-\frac{b}{6a}; f\left(-\frac{b}{6a}\right)\right)$ (1).
Si $a < 0$, realizando un razonamiento similar al empleado para $a > 0$, podemos afirmar que el punto $\left(-\frac{b}{6a}; f\left(-\frac{b}{6a}\right)\right)$ es el único punto de inflexión de f(x) (2).
Luego, de (1) y (2), concluimos que f(x) tiene exactamente un punto de inflexión.

16. Los puntos de inflexión son (0; 0) y $\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

17. La función derivada segunda de h(x) es $h''(x) = 240x^{14} + 90x^4 + 2$. Como $h''(x)$ es una suma de términos positivos, pues cada uno de ellos es el producto entre un número positivo y una potencia par de **x**, entonces, $h''(x)$ es positiva para cualquier valor de **x**. Es decir que $h''(x) > 0$ en $\mathbb{R}$, o sea, en Dom h, y en consecuencia h(x) no tiene puntos de inflexión.

p | **53**

18. Se deben producir 100 artículos.

19. Existe un único punto y es (0; 8).

20. La base y la altura miden ambas 1 m, o sea que es un cuadrado de 1 m de lado.

p | **54**

21. El área máxima es $\frac{256\sqrt{3}}{9}$.

22. Hay un solo punto y es $\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

23. Para el rectángulo de área máxima, la base es $\frac{3}{2}$ y la altura es 1. No existe rectángulo de área mínima.

p | **56**

24. El límite es 2 y no se puede usar la regla de L'Hôpital para realizar el cálculo, porque no existe $\lim\limits_{x \to \infty}$ sen x.

25. El procedimiento no es correcto, ya que es incorrecto haber utilizado la regla de L'Hôpital por tercera vez, pues no se trata de una indeterminación.

26. **a.** $\frac{1}{10}$ **b.** $-\frac{1}{\pi}$

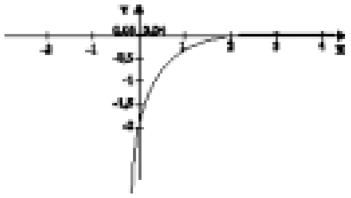
p | **57**

27. **a.** 1 **b.** 0 **c.** 0 **d.** ∞

28. $\frac{1}{6}$

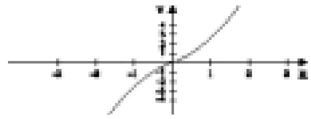
p | **59**

29. **a.** Dom f = $\mathbb{R}$
b. La recta y = 0 es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. No existe asíntota vertical ni oblicua.
c. $C^0 = \{2\}$, $C^+ = (2; +\infty)$ y $C^- = (-\infty; 2)$.
d. La función f(x) crece en $(-\infty; 3)$ y decrece en $(3; +\infty)$, tiene un máximo relativo en x = 3 y no posee mínimos relativos.
e. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty; 4)$ y cóncava hacia arriba en $(4; +\infty)$. El punto de inflexión es (4; 0,04).
f.



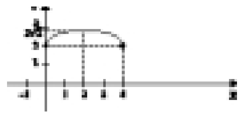
p | **60**

30. **a.** Dom g = $\mathbb{R}$
b. No hay asíntotas.
c. $C^0 = \{0\}$, $C^+ = (0; +\infty)$ y $C^- = (-\infty; 0)$.
d. La función es creciente en $\mathbb{R}$; por lo tanto, no tiene extremos relativos.
e. La función g(x) es cóncava hacia abajo en $(-\infty; 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0; +\infty)$. El punto (0; 0) es punto de inflexión.
f.

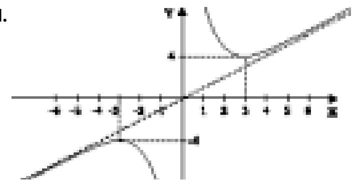


p | **61**

31. a.I. Dom f = [0; 4]
II. No existen asíntotas.
III. $C^0 = \emptyset$, $C^+ = [0; 4]$ y $C^- = \emptyset$.
IV. La función f(x) crece en (0; 2) y decrece en (2; 4), alcanza un máximo relativo en x = 2 y en x = 0 y x = 4 tiene mínimos relativos.
V. La función es cóncava hacia abajo en [0; 4], o sea, en su dominio.
VI. No hay puntos de inflexión.

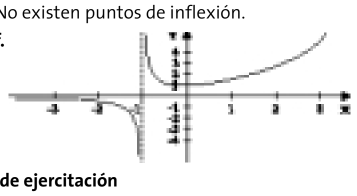


b.I. Dom g = $\mathbb{R} - \{0\}$
II. La recta x = 0 es asíntota vertical y la recta y = x es asíntota oblicua. No existe asíntota horizontal.
III. $C^0 = \emptyset$, $C^+ = \mathbb{R}^+$ y $C^- = \mathbb{R}^-$
IV. La función es creciente en $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ y decreciente en $(-3; 0) \cup (0; 3)$, tiene un máximo relativo en x = –3 y un mínimo relativo en x = 3.
V. La función g(x) es cóncava hacia abajo en $(-\infty; 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0; +\infty)$. No existen puntos de inflexión.
VI.



p | **62**

32. **a.** Dom h = $\mathbb{R} - \{-1\}$
b. La recta x = –1 es asíntota vertical y la recta y = 0 es asíntota horizontal, cuando $x \to -\infty$.
c. $C^0 = \emptyset$, $C^+ = (-1; +\infty)$ y $C^- = (-\infty; -1)$.
d. La función h(x) es creciente en $(0; +\infty)$ y decreciente en $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$, no tiene máximos relativos y alcanza un mínimo relativo en x = 0.
e. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty; -1)$ y cóncava hacia arriba en $(-1; +\infty)$. No existen puntos de inflexión.
f.



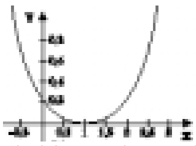
Guía de ejercitación

1. **a.** $\mathbb{R} - \{2\}$ **e.** $(-\infty; -4) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$
b. x = 2 **f.** x = –4 **h.** $(-\infty; -4) \cup (-3; 2)$
c. y = –1 **g.** x = –2
d. Cualquier valor de $\mathbb{R} - \{-4 ; 2\}$

2. **a.** Falsa, pues como $g'(x) > 0$ en el intervalo $[-2; 3]$, entonces, la función g(x) es creciente en ese intervalo.
b. Falsa, porque para que la función g(x) sea cóncava hacia arriba en el intervalo (0 ; 3), la función g'(x) debería ser creciente en dicho intervalo y esto no sucede.
c. Verdadera por la justificación utilizada para el ítem **a.**
d. Falsa, ya que en x = 0 la función g'(x) no cambia de decreciente a creciente, o viceversa; por lo tanto, la función g(x) no cambia de concavidad en x = 0.

3. **a.** $(0; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$
b. $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$
c. (3; 4)
d. 0, 1 y 2.
e. Un único valor de x, que es **x** = 1.
f. $(0; 1) \cup (4; 5)$

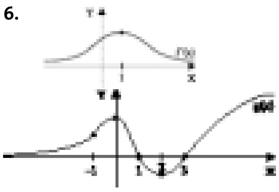
4. **a.** Por ejemplo:



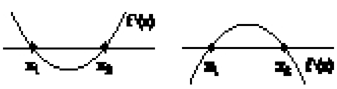
b. No es único, sólo debe cumplirse que h(x) sea decreciente en $(-\infty; 1)$ y creciente en $(1; +\infty)$ y cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$ (porque h'(x) es creciente en $\mathbb{R}$).

5. Los valores críticos de g(x) son x = –3 y x = 0. La función g(x) es creciente en $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$ y decreciente en (–3; 0), tiene un máximo relativo en x = –3 y un mínimo relativo en x = 0. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty; -2)$ y cóncava hacia arriba en $(-2; +\infty)$. El punto de inflexión es (–2; 2).

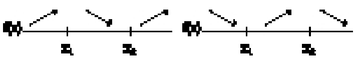
6.



7. Llamemos, respectivamente, x_1 y x_2 a cada una de las abscisas de los dos puntos estacionarios de f(x). La función derivada de f(x) es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Esta función, cuyas raíces son x_1 y x_2, es una función cuadrática, es decir que su gráfico es una parábola. Luego, resulta:
si a > 0 si a < 0



Entonces, considerando los intervalos de positividad y de negatividad de f '(x), obtenemos que
si a > 0 si a < 0



Luego, como Dom f = $\mathbb{R}$, si a > 0, entonces, f(x) es creciente en $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ y decreciente en $(x_1; x_2)$, y si a < 0, entonces, f(x) es decreciente en $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ y creciente en $(x_1; x_2)$. Por lo tanto, si a > 0, la función f(x) tiene un máximo relativo en $x = x_1$ y un mínimo relativo en $x = x_2$.
Luego, f(x) alcanza un máximo relativo en la abscisa de uno de sus puntos estacionarios y un mínimo relativo en la abscisa del otro punto estacionario.

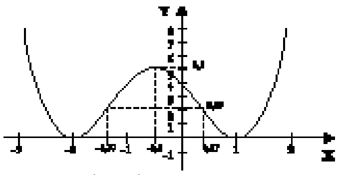
8. a > 1

9. La función derivada de h(x) es $h'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{x}$.
Como la función h'(x) es positiva para cualquier valor positivo de **x**, entonces, la función h(x) es creciente para los valores positivos de **x**.

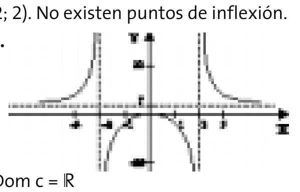
10. $a = -\frac{3}{2}$ y b = 6.

11. **a.** a = 49
b. Para a = 49 la función g(x) tiene un mínimo relativo en x = 2 y un máximo relativo en x = –2.

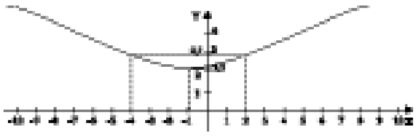
12. **a.** **I.** Dom a = $\mathbb{R}$
II. No existen asíntotas.
III. $C^0 = \{-2; 1\}$, $C^+ = \mathbb{R} - \{1; -2\}$ y $C^- = \emptyset$.
IV. La función a(x) es derivable en cualquier valor de su dominio.
V. La función crece en $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ y decrece en $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, alcanza un máximo relativo en $x = -\frac{1}{2}$ y mínimos relativos en x = – 2 y en x = 1.
VI. La función a(x) es cóncava hacia arriba en $(-\infty; -1{,}37) \cup (0{,}37; +\infty)$ y cóncava hacia abajo en (–1,37; 0,37). Los puntos de inflexión son (–1,37; 2,23) y (0,37; 2,23).
VII.



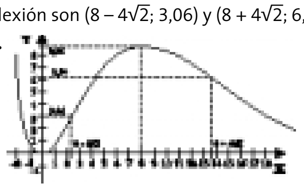
b. **I.** Dom b = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
II. Las asíntotas verticales son x = –2 y x = 2, y la asíntota horizontal es y = 7. No existe asíntota oblicua.
III. $C^0 = \{0\}$, $C^+ = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ y $C^- = (-2; 0) \cup (0; 2)$.
IV. La función es derivable en cualquier valor de su dominio.
V. La función es creciente en $(-\infty; -2) \cup (-2; 0)$ y decreciente en $(0; 2) \cup (2; +\infty)$, tiene un máximo relativo en x = 0.
VI. la función es cóncava hacia arriba en $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ y cóncava hacia abajo en (–2; 2). No existen puntos de inflexión.
VII.



c. **I.** Dom c = $\mathbb{R}$
II. No hay asíntotas.
III. $C^0 = \emptyset$, $C^+ = \mathbb{R}$ y $C^- = \emptyset$.
IV. La función c(x) es derivable en cualquier valor de su dominio.
V. La función crece en $(-1; +\infty)$ y decrece en $(-\infty; -1)$, no tiene máximos relativos y alcanza un mínimo relativo en x = –1.
VI. La función c(x) es cóncava hacia arriba en (–4; 2) y es cóncava hacia abajo en $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$. Los puntos de inflexión son (–4; ln18) y (2; ln18).
VII.



d. **I.** Dom d = $\mathbb{R}$
II. La recta y = 0 es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. No existe asíntota vertical ni oblicua.
III. $C^0 = \{0\}$, $C^+ = \mathbb{R} - \{0\}$ y $C^- = \emptyset$.
IV. La función es derivable en cualquier valor de su dominio.
V. La función d(x) es creciente en (0; 8) y decreciente en $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$, tiene un máximo relativo en x = 8 y hay un mínimo relativo en x = 0.
VI. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty; 8 - 4\sqrt{2}) \cup (8 + 4\sqrt{2}; +\infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(8 - 4\sqrt{2}; 8 + 4\sqrt{2})$. Los puntos de inflexión son $(8 - 4\sqrt{2}; 3{,}06)$ y $(8 + 4\sqrt{2}; 6{,}14)$.
VII.



13. El número es $\frac{1}{4}$.

14. Los vértices son (0; 0), $(3\sqrt{3}; 108)$ y $(-3\sqrt{3}; 108)$.

15. **a.** $\frac{1}{9}$ **b.** $-\frac{1}{2}$ **c.** 0 **d.** $+\infty$ **e.** 0

16. f(0) = 3 y f '(0) = 7.

Capítulo 3

p | **73**

1. **a.** 135 km/h **b.** $d(t) = \frac{9}{2}t^2$ **c.** 1012,5 km

2. **a.** Se verifica que F(x) es una función primitiva de f(x).
b. No se verifica que F(x) es una función primitiva de f(x).
c. Se verifica que F(x) es una función primitiva de f(x).
d. No se verifica que F(x) es una función primitiva de f(x).
e. Se verifica que F(x) es una función primitiva de f(x).

p | **74**

3. Las funciones de los ítem **b.** y **e.** son funciones primitivas de g(x).

4. $F(x) = 5\ln x - \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{29}{3}$

5. $H(x) = x - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + \frac{13}{4}$

p | **75**

6. **a.** $A(x) = e^x + \cos x + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}, k \in \mathbb{R}$

b. $B(x) = -\cos x + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2\ln|x| + k, k \in \mathbb{R}$

c. $C(x) = \frac{7}{9}x^9 - \frac{5}{8}x^8 - \frac{2}{7}x^7 - \frac{5}{2}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 +$

$+ 9x + k, k \in \mathbb{R}$

d. $D(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + k, k \in \mathbb{R}$

e. $E(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k,$ $k \in \mathbb{R}$

p | **77**

7. **a.** 30 **b.** 35,625

8. **a.** 150 **b.** 144,375

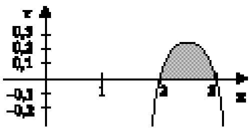
p | **79**

9. **a.** $A'(t) = t^4$ **b.** $B'(t) = t^3$ **c.** $C'(t) = 2\,t\cos t^2$

10. **a.** La función H(x) no tiene máximos relativos y posee un mínimo relativo en t = –5.
b. La función J(x) tiene un máximo relativo en t = 2 y un mínimo relativo en t = 4.

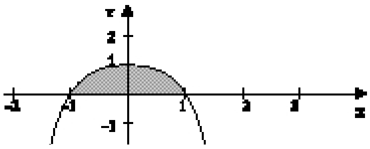
p | **80**

11. **a.**



El área de la región sombreada es $\frac{1}{6}$.

b.



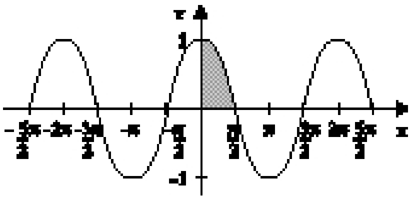
El área de la región sombreada es $\frac{8}{5}$.

12. $A(x) = \frac{x^3}{3} + 10x$

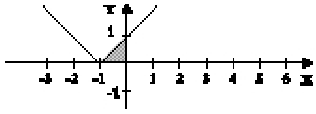
p | **81**

13. a = 1

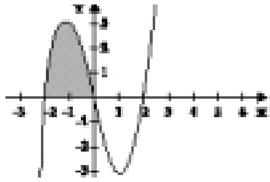
14. **a.** A = 1



b. A = 0,5



c. A = 4



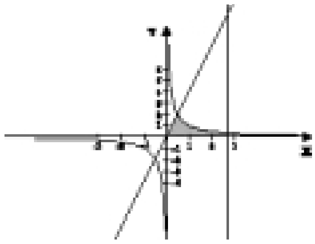
p | **82**

15. **a.** 0 **b.** 1116 **c.** 0

16. **a.** No coincide, pues f(x) es negativa entre x = 0 y x = 9.
b. Sí coincide, ya que la función f(x) es continua y positiva en cualquier valor de [–1; 8].

p | **84**

17. $A = \frac{3}{2} + \ln 2$

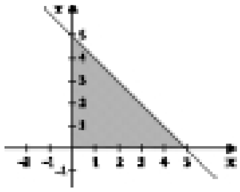


18. 42,5

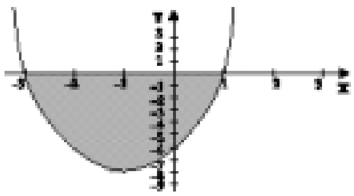
19. $\frac{17}{3}$

Guía de ejercitación

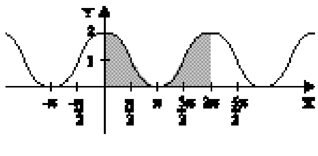
1. **a.** A = 12,5



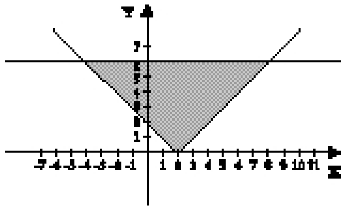
b. $A = \frac{64}{3}$



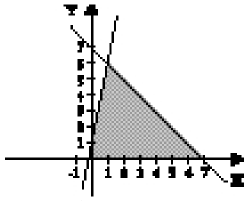
c. A = 2π



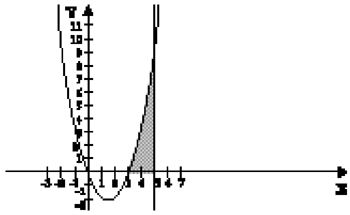
d. A = 36



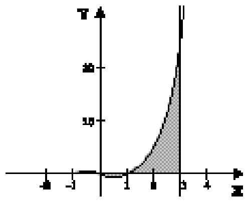
e. A = 21,6



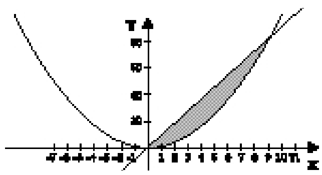
2. **a.** La opción correcta es **II.**, pues la región encerrada entre el gráfico de f(x), x = 5 y el eje **x** es la siguiente región sombreada:



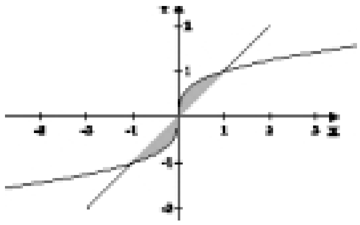
b. La opción correcta es **VI.**, porque la región comprendida entre el gráfico de f(x), el eje **x**, x = –1 y x = 3 es la siguiente región sombreada:



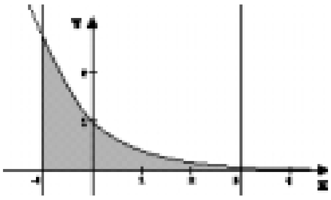
3. **a.** A = 121,5



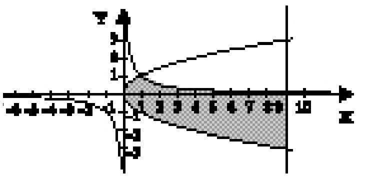
b. A = 0,5



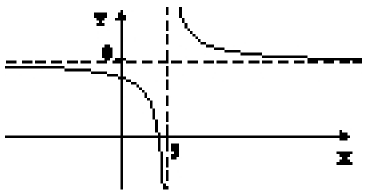
c. $A = e - e^{-3}$



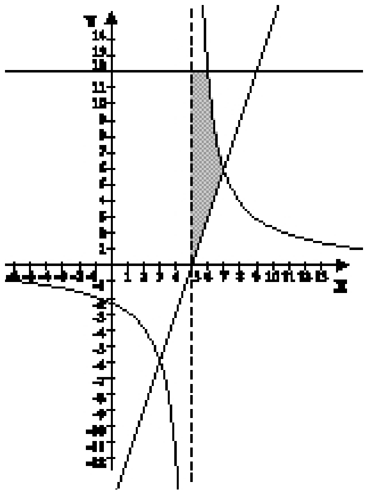
d. $A = \frac{56}{3} + \ln 9$



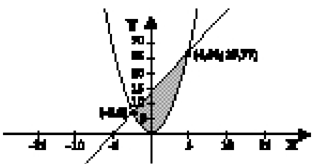
e. $A = 1 + \ln 40$



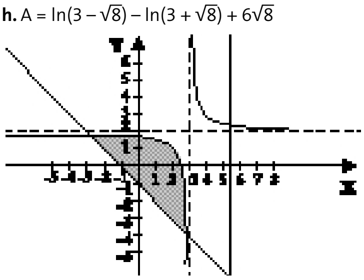
f. $A = 6 + 12 \ln 2$



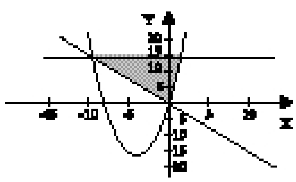
g. $A = \frac{4000}{81}$



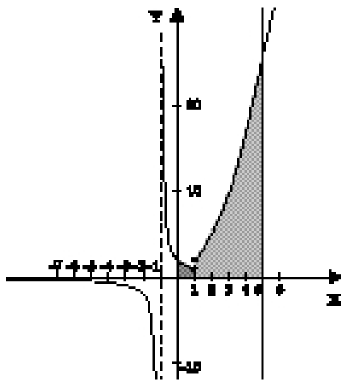
h. $A = \ln(3 - \sqrt{8}) - \ln(3 + \sqrt{8}) + 6\sqrt{8}$



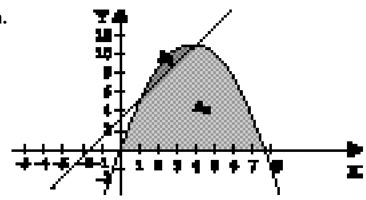
i. $A = 78{,}9375$



j. $A = \frac{136}{3} + \ln 2$



4. a.



b. $A_1 = \frac{27}{8}$ y $A_2 = \frac{5719}{108}$. El sector más grande es el que tiene como área a A_2.

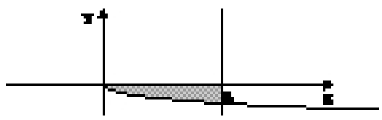
5. a. $A'(t) = \ln t$

b. $B'(t) = \frac{1}{t}\int_2^t x^2\,dx + t^2 \ln t = \frac{1}{t}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{8}{3}\right) + t^2 \ln t$

6. $3e^{-2} - 2$

7. La función F(t) tiene un máximo relativo en t = 0 y un mínimo relativo en t = 1.

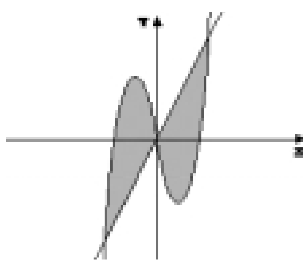
8. a = 9



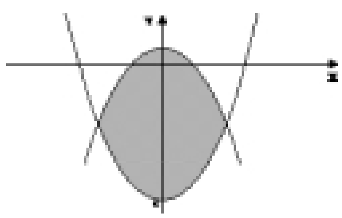
9. a. A = 6 **c.** A = 10

b. $A = \ln 2 - \frac{3}{8}$ **d.** A = 40,929

10. m = 8



11. c = –64



12. 8,5

Capítulo 4

p | **95**

1. a. $x + k,\ k \in \mathbb{R}$

b. $2x^{\frac{9}{2}} - 12x^{\frac{5}{2}} + 50\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}$

c. $-5\cos x + 6 \operatorname{sen} x + k,\ k \in \mathbb{R}$

d. $e^x - \frac{5}{2}x^2 + 2x + k,\ k \in \mathbb{R}$

2. $F(x) = 5\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - 2\sqrt{x} + \frac{11}{2},\ k \in \mathbb{R}$

p | **96**

3. a. $\frac{\operatorname{sen}(mx+n)}{m} + k,\ k \in \mathbb{R}$

b. $\frac{-\cos(mx+n)}{m} + k,\ k \in \mathbb{R}$

c. $\frac{1}{m}e^{mx+n} + k,\ k \in \mathbb{R}$

4. a. $-\frac{1}{27}(3x+2)^{-9} + k,\ k \in \mathbb{R}$

b. $\frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}} + k,\ k \in \mathbb{R}$

c. $\frac{1}{6}\ln|2x^3+3| + k,\ k \in \mathbb{R}$

d. $-\frac{3}{2}e^{-x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}$

p | **97**

5. $\frac{2}{\pi}$

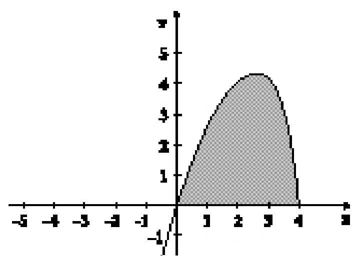
p | **98**

6. a. $\operatorname{sen}(\ln|x|) + k,\ k \in \mathbb{R}$

b. $-2\cos(\sqrt{x} - 10) + k,\ k \in \mathbb{R}$

c. $-\ln|\cos x| + k,\ k \in \mathbb{R}$

7. $A = \frac{128}{15}\sqrt{2}$



p | **99**

8. a. $F(x) = (3x+2)\operatorname{sen} x + 3\cos x + k,\ k \in \mathbb{R}$

b. $G(x) = -x^2\cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + k,\ k \in \mathbb{R}$

9. a. $-x\,e^{-x+2} - e^{-x+2} + k,\ k \in \mathbb{R}$

b. $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + k,\ k \in \mathbb{R}$

c. $(2x+3)\,e^x - 2\,e^x + k,\ k \in \mathbb{R}$

p | **100**

10. a. $x\ln(5x) - x + k,\ k \in \mathbb{R}$

b. $\frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + k,\ k \in \mathbb{R}$

c. $e^{2x}\left[\frac{2}{13}\cos(3x+1)+\frac{3}{13}\operatorname{sen}(3x+1)\right]+k,\ k\in\mathbb{R}$

d. $\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ln(1+x)-\frac{4}{9}(1+x)^{\frac{3}{2}}+k,\ k\in\mathbb{R}$

p | **101**

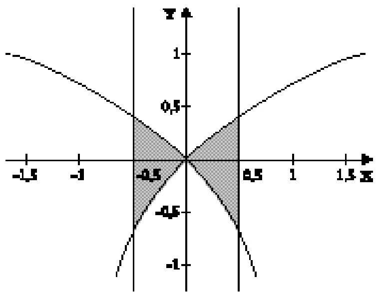
11. **a.** $-\sqrt{x}\cos(2\sqrt{x}-3)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\sqrt{x}-3)+k,\ k\in\mathbb{R}$

b. $x[\ln^2 x-2\ln x+2]+k,\ k\in\mathbb{R}$

c. $\frac{1}{2}[-\operatorname{sen}x\cdot\cos x+x]+k,\ k\in\mathbb{R}$

p | **102**

12. $A=3\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}$



13. **a.** $\frac{13}{2}\ln|x-2|-4\ln|x-1|+k,\ k\in\mathbb{R}$

b. $\frac{7}{125}\ln|x+2|-\frac{7}{125}\ln|x-3|-$

$-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{6}{25(x-3)}+k,\ k\in\mathbb{R}$

c. $x-\ln|x-2|+6\ln|x-3|+k,\ k\in\mathbb{R}$

d. $-\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}\ln|e^x-1|+\frac{1}{10}\ln|e^x+5|+k,\ k\in\mathbb{R}$

e. $4\ln|\ln x-2|+5\ln|\ln x+2|+k,\ k\in\mathbb{R}$

Guía de ejercitación

1. $f(x)=-\frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x-\pi)+x+\pi$

2. $g(x)=-\frac{3}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x+3|+2\ln 3$

3. $H(x)=x\operatorname{sen}x+\cos x+\frac{\pi}{2}$

La función H(x) es la única primitiva de h(x) que cumple la condición pedida.

4. **a.** $\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}}-\frac{15}{8}x^{\frac{16}{3}}+\frac{75}{19}x^{\frac{19}{3}}+k,\ k\in\mathbb{R}$

b. $\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}-\frac{8}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+k,\ k\in\mathbb{R}$

c. $\frac{\ln^3 x}{3}+\frac{\ln^2 x}{2}-2\ln x+k,\ k\in\mathbb{R}$

d. $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+k,\ k\in\mathbb{R}$

e. $\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}+k,\ k\in\mathbb{R}$

f. $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{(5-2x^2)^3}+k,\ k\in\mathbb{R}$

g. $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2+8)^5}-\frac{16}{3}\sqrt{(x^2+8)^3}+64\sqrt{x^2+8}+k,\ k\in\mathbb{R}$

h. $-14\ln|1-\sqrt{x}|-\frac{2}{(1-\sqrt{x})}-3x-12\sqrt{x}+k,\ k\in\mathbb{R}$

i. $\frac{11}{23}(1+\ln x)^{\frac{23}{11}}-\frac{11}{12}(1+\ln x)^{\frac{12}{11}}+k,\ k\in\mathbb{R}$

j. $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2(3x+1)-\frac{2}{3}\operatorname{tg}(3x+1)+k,\ k\in\mathbb{R}$

k. $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+k,\ k\in\mathbb{R}$

l. $2e^{\sqrt{x}}+k,\ k\in\mathbb{R}$

m. $\frac{1}{6}x^2e^{6x}-\frac{1}{18}xe^{6x}+\frac{1}{108}e^{6x}+k,\ k\in\mathbb{R}$

n. $\frac{e^{x^2-4}\operatorname{sen}(x^2-4)-e^{x^2-4}\cos(x^2-4)}{4}+k,\ k\in\mathbb{R}$

o. $\frac{1}{3}[\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(3-x)-2\cos(2x)\cos(3-x)]+k,$ $k\in\mathbb{R}$

p. $e^{2x-3}\left[\frac{2}{13}\cos(3x-2)+\frac{3}{13}\operatorname{sen}(3x-2)\right]+k,\ k\in\mathbb{R}$

q. $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\operatorname{sen}(\ln x)]+k,\ k\in\mathbb{R}$

r. $-2x^3\cos(x^3)+2\operatorname{sen}(x^3)+k,\ k\in\mathbb{R}$

s. $3\sqrt[3]{x^2}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})+6\sqrt[3]{x}\cos(\sqrt[3]{x})-6\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})+k,$ $k\in\mathbb{R}$

t. $\frac{x^3}{3}+2x\operatorname{sen}x+2\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\cos x+\frac{1}{2}x+k,$ $k\in\mathbb{R}$

u. $3\ln|x|-2\ln|x-1|-\ln|x+1|+k,\ k\in\mathbb{R}$

v. $x-\frac{1}{2x^2}-2\ln|x+2|+k,\ k\in\mathbb{R}$

w. $x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+k,\ k\in\mathbb{R}$

x. $\frac{3}{64}\ln\left|\frac{x-5}{x+3}\right|-\frac{13}{8(x-5)}+k,\ k\in\mathbb{R}$

5. **a.** $\frac{5}{3}\ln|\operatorname{sen}x+2|-\frac{2}{3}\ln|\operatorname{sen}x-1|+k,\ k\in\mathbb{R}$

b. $\ln|e^x+9|+k,\ k\in\mathbb{R}$

c. $\frac{1}{3}\ln|\operatorname{sen}x-1|-\frac{4}{3}\ln|\operatorname{sen}x+2|+\operatorname{sen}x+k,\ k\in\mathbb{R}$

d. $\frac{1}{4}\ln|1-\cos x|+\frac{7}{4}\ln|\cos x+3|+k,\ k\in\mathbb{R}$

e. $-\frac{1}{2}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln|e^x+1|+\frac{10}{3}\ln|e^x-2|+k,$ $k\in\mathbb{R}$

f. $\frac{8}{3}\ln|\sqrt{x}-2|+\frac{4}{3}\ln|\sqrt{x}+1|+k,\ k\in\mathbb{R}$

g. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x-2}{\operatorname{sen}x+2}\right|+k,\ k\in\mathbb{R}$

h. $3\ln\left|\operatorname{sen}x-\frac{1}{4}\right|-2\ln\left|\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}\right|+k,\ k\in\mathbb{R}$

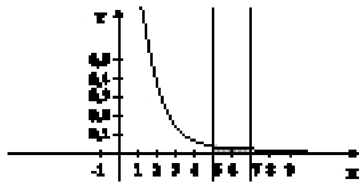
i. $-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{4}\cos x-\frac{7}{2}\ln\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|+$

$+\frac{37}{16}\ln\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|+k,\ k\in\mathbb{R}$

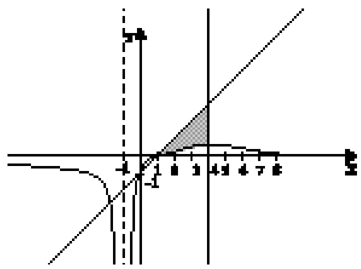
j. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+x+k,\ k\in\mathbb{R}$

k. $\ln\left|\frac{3e^{5x}-1}{3e^{5x}+1}\right|-\frac{e^{5x}}{90(9e^{10x}-1)}+k,\ k\in\mathbb{R}$

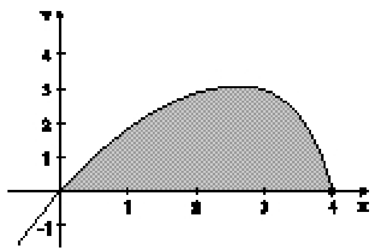
6. $A=\frac{2}{7}-5\ln\frac{21}{20}$



7. A = 4,473



8. $A=\frac{128}{15}$



Capítulo 1

p | **12**

1. **a.** Si llamamos a **a** la cantidad de adultos y **b**, a la de chicos, las ecuaciones que permiten resolver el problema son las siguientes:

$$\begin{cases} a + b = 28 \\ 7a + 5b = 176 \end{cases}$$

b. Si, de las respuestas dadas por el participante, denominamos **x** a la cantidad de respuestas correctas e **y**, a la de respuestas incorrectas, las ecuaciones que permiten resolver el problema son éstas:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x - 2y = 55 \end{cases}$$

p | **13**

2. **a.** Falsa, porque como cualquier par de valores de la forma $\left(x,\ \dfrac{5-3x}{2x}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$ verifica la ecuación $3x + 2y = 5$, entonces, existen infinitos pares de valores que verifican dicha ecuación.
b. Verdadera, pues $3 \,.\, 2 + (-5) = 1$.
c. Falsa, porque $2 \,.\, 2 + 2 \,.\, (-5) \neq 3$.
d. Falsa, pues no existe ningún par de valores $(x ; y)$ que verifique la ecuación dada $x \,.\, 0 + 0 \,.\, y = 12$.
e. Falsa, porque cualquier par de valores de la forma $(x ; 3)$ verifica la ecuación $0 \,.\, x + 3 \,.\, y = 9$; por lo tanto, tiene infinitas soluciones.
f. Verdadera, pues las coordenadas de cualquier punto de la recta verifican la ecuación $x \,.\, 4 + y = 7$.

p | **14**

3.
$$\begin{cases} x \,.\, y = 1 \\ x = y + 7 \end{cases}$$

p | **15**

4. **a.** $a = 18$ y $b = 10$.
b. $x = 27$ e $y = 13$.

5. Por ejemplo, encuentren dos números **x** e **y** que cumplan lo siguiente: la suma del primero y el doble del segundo es 150, el doble del primero más el triple del segundo es 20 y la suma de los opuestos de los dos números es 130.

6. **a.** $\begin{cases} y = 8 - 2x \\ y = 1 + \dfrac{1}{3}x \\ y = 4 - \dfrac{2}{3}x \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} y = 6 - 2x \\ y = 3 + \dfrac{1}{2}x \\ y = 1 + \dfrac{1}{2}x \end{cases}$

p | **16**

7. **a.** No es lineal. **c.** No es lineal.
b. Es lineal. **d.** Es lineal.

8. **a.** Por ejemplo: $\left(0; \dfrac{5}{4}\right), \left(1; \dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{5}{2}; 0\right)$.
b. Por ejemplo: $\left(0; -\dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$ y (4;10,5)
c. El par de valores $\left(\dfrac{11}{4}; \dfrac{6}{7}\right)$ verifica simultáneamente las dos ecuaciones, pues

$$2 \,.\, \frac{11}{4} + 4 \,.\, \frac{6}{7} = 5 \ \text{ y } \ 6 \,.\, \frac{11}{4} - 2 \,.\, \frac{6}{7} = 3.$$

9. **a.** Por ejemplo: $x = 0$, $y = 0$ y $z = -2$.
b. Existen infinitos valores de **x**, de **y** y de **z** que verifican la ecuación $x + y - z = 2$, ya que al asignar valores arbitrarios, por ejemplo, a **x** y a **y**, se puede obtener un valor de **z**.

p | **17**

10. El vector del ítem **b.** y el del ítem **e.** son solución del sistema de ecuaciones lineales del ítem **I.**, pues $x = 4{,}5$ y $z = -0{,}5$ verifican las ecuaciones de ese sistema.
El vector del ítem **a.** es solución del sistema de ecuaciones lineales del ítem **II.**, porque $x = 1$, $y = 1$ y $z = 2$ verifican las ecuaciones de ese sistema.
El vector del ítem **c.** es solución del sistema de ecuaciones lineales del ítem **III.**, pues $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ y $w = -1$ verifican las ecuaciones de ese sistema.
Ninguno de los vectores dados es solución del sistema de ecuaciones lineales del ítem **IV.**, porque ninguno de ellos tiene componentes que sean solución de todas las ecuaciones del sistema **IV**.

p | **18**

11. **a.** Compatible indeterminado.
b. Incompatible.
c. Compatible determinado.
d. Incompatible.
e. Compatible determinado.

p | **19**

12. **a.** Si, de los artículos comprados por Alicia, Estela y Luisa, llamamos **f** al precio de un paquete de fideos Pastalín, **p** al de un kilogramo de pan y **l** al de un cartón de leche Económica, el sistema de ecuaciones lineales que permite resolver el problema es

$$\begin{cases} 5f + 4p + 8l = 23{,}62 \\ 7f + 3p + 6l = 20{,}64 \\ 10f + 7p + 12l = 40{,}08 \end{cases}$$

b. Si denominamos **x**, **y** y **z** a las calificaciones obtenidas por Sandra en el primero, segundo y tercer examen, respectivamente, el sistema de ecuaciones lineales que permite resolver el problema es

$$\begin{cases} \dfrac{x + y + z}{3} = 84 \\ y + z = 157 \\ x = z + 25 \end{cases}$$

p | **20**

13. Los únicos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes son los sistemas **a.** y **c.**, pues ambos tienen el mismo conjunto solución, que es $S = \{(1{,}5 ; 9{,}5)\}$.

p | **21**

14. Por ejemplo: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$ cuyo conjunto solución es $S = \{(y - z; y; z) / y \in \mathbb{R} \text{ y } z \in \mathbb{R}\}$.

p | **22**

15. **a.** Por ejemplo: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 12x_1 - x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$

donde las dos primeras ecuaciones son iguales a las dos primeras del sistema dado y la última ecuación es la suma entre la primera y la tercera ecuación del sistema dado.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 9x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

donde la primera y la última ecuación son, respectivamente, iguales a la primera y a la tercera ecuación del sistema dado y la segunda ecuación es igual a la segunda ecuación del sistema dado multiplicada por 2.

b. Por ejemplo: $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -2 \end{cases}$

donde la primera ecuación es la resta entre la primera y la segunda ecuación del sistema dado y la segunda ecuación es igual a la última ecuación del sistema dado.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 0{,}6x_1 + x_2 - 0{,}4x_3 - 1{,}2x_4 = -0{,}4 \end{cases}$$

donde la primera ecuación es igual a la primera del sistema dado y la segunda ecuación es igual a la segunda del sistema dado multiplicada por $\frac{1}{5}$.

p | **23**

16. **a.** $a = -39$ y $b = -7{,}5$.
b. $a = -9{,}6$ y $b \neq \dfrac{81}{11}$.
c. Todos los valores de **a** y de **b** que verifican que $a - 20 = b$.

p | **24**

17. **a.** Micaela había ahorrado \$20, Carolina \$40 y Florencia \$60.
b. 180

p | **25**

18. **a.** Por ejemplo, si intercambiamos el orden de las ecuaciones segunda y tercera del sistema dado, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 4 \\ -2y + 5z = 7 \\ 2x - 3y - 9z = -5 \end{cases}$$

b. Por ejemplo, si reemplazamos la segunda ecuación del sistema dado por la que se obtiene al multiplicar aquella ecuación por 3, resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z + 9w = -6 \\ 3x + 3z - 15w = 81 \\ 5x + 2y - 3z + 2w = 4 \end{cases}$$

c. Por ejemplo, si sustituimos la segunda ecuación del sistema dado por la que resulta de sumar las dos primeras ecuaciones de dicho sistema, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z + w - 5t = 5 \\ x + 2y + 10w - 6t = 13 \\ -3x + 2y - 2z + w + 2t = 7 \end{cases}$$

p **| 26**

19.

a. $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 4 \\ -13y - 17z = -23 \\ -99z = -137 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x + 2y + 3z - 9w = -6 \\ x + z - 5w = 27 \\ 6z + 7w = -10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y - z + w - 5t = 5 \\ y + z + 9w - t = 8 \\ 10z + 41w + 8t = 18 \end{cases}$

p **| 27**

20.

a. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & -6 & -2 \end{array}\right)$

21.

$$\begin{cases} x + y + z - 3w = 15 \\ 4x - 2y - 4z + w = -5 \\ 8x - y - 4z - w = 0 \\ 2x + 5y - 7z + w = 7 \end{cases}$$

p **| 29**

22. **a.** Por ejemplo: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$

pues el conjunto solución es

$S = \left\{\left(1; \frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

b. Por ejemplo:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$ pues el conjunto solución es $S = \{(1; y; -y) / y \in \mathbb{R}\}$

c. Por ejemplo:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$ pues el conjunto solución es $S = \phi$

23. **a.** Por ejemplo: $3x - y - z = 15$, ya que el sistema formado por las tres ecuaciones tiene como conjunto solución a

$S = \left\{\left(\frac{-46}{3}; \frac{-88}{3}; \frac{-95}{3}\right)\right\}$.

b. Por ejemplo: $7x - y - 3z = 17$, porque

$S = \left\{\left(\frac{44}{13} + y; y; \frac{-4}{13} + \frac{5}{4}y\right) / y \in \mathbb{R}\right\}$

es el conjunto solución del sistema compuesto por las tres ecuaciones.

c. Por ejemplo: $4x + 6y - 8z = 16$, pues el sistema constituido por las tres ecuaciones tiene a $S = \phi$ como conjunto solución.

p **| 30**

24. El sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema es $\begin{cases} 10x + 5y + z = 100 \\ x + y + z = 50 \end{cases}$

que es compatible indeterminado. Pero como **x**, **y** y **z** son, respectivamente, la cantidad de tortas, la de arrollados y la de empanadas incluidas en el presupuesto, entonces, sus valores deben ser números naturales. Por lo tanto, la solución del problema es $x = 2$, $y = 8$ y $z = 40$.

25. Alicia tiene 45 figuritas, Mariela 35 y Carla 25.

p **| 31**

26. **a.** Si llamamos **C** a la edad de Carlos, **H** a la del hijo mayor y **h** a la del hijo menor, el sistema que resuelve el problema es

$$\begin{cases} C + H + h = 70 \\ C - h = 31 \end{cases}$$

que es compatible indeterminado, y cuyo conjunto solución es $S = \{(31 + h; 39 - 2h; h) / h \in \mathbb{R}\}$. Sin embargo, **C**, **H** y **h** son edades; en consecuencia, sus valores son números naturales. Entonces, debe ser $31 + h > 0$, $39 - 2h > 0$ y $h > 0$, es decir, $h < 19{,}5$. Por lo tanto, los valores que puede tomar **h** son 1, 2, 3,... o 19.

b. En el negocio hay 17 triciclos, 15 bicicletas y 20 kartings.

p **| 32**

27. **a.** $S = \left\{\left(\frac{123}{43}; \frac{-28}{43}; \frac{119}{43}; \frac{-139}{43}\right)\right\}$

b. $S = \{(4; 0; -2)\}$

p **| 33**

28. **a.** $f = 0{,}9$, $p = 2{,}4$ y $L = 1{,}19$.

b. $x = 95$, $y = 87$ y $z = 70$.

p **| 34**

29. **a.** $S = \{(3; 0; -1)\}$

b. $S = \left\{\left(\frac{80}{13} - \frac{28}{13}t; \frac{14}{13} + \frac{25}{13}t; \frac{36}{13} - \frac{10}{13}t; t\right) / t \in \mathbb{R}\right\}$

p **| 35**

30. 1845

31.

a. Por ejemplo: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 15 & 23 \\ 0 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$

b. Por ejemplo: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 15 & 23 \\ 0 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c. Por ejemplo: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 15 & 23 \\ 0 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

p **| 36**

32. **a.** $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

b. No existen valores de **a** para que el sistema sea compatible indeterminado.

c. $a = 1$ o $a = 2$.

p **| 37**

33. **a.** $a \neq 1$ y $a \neq -3$. **b.** $a = 1$ **c.** $a = -3$

p **| 38**

34. **a.** $S = \left\{\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{9}; \frac{10}{9}\right)\right\}$

b. $S = \left\{\left(\frac{12 - 3w}{2}; 2; \frac{-20 + w}{2}; w\right) / w \in \mathbb{R}\right\}$

c. $S = \phi$

Guía de ejercitación

1. **a.** Falsa, porque los sistemas homogéneos siempre son compatibles.

b. Falsa, pues no es posible despejar todas las incógnitas sin que dos de ellas queden en función de la restante.

c. Falsa, ya que, por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales es incompatible. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

d. Verdadera, porque, por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

e. Falsa, pues, por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ es incompatible.

2.

a. Por ejemplo: $\begin{cases} 3x - 2y + w = 21 \\ 4x - 4y - 5w = -20 \\ -3x + 4y + 2z - 2w = -3 \\ -5x + y + z + 2w = -28 \end{cases}$

b. Por ejemplo: $\begin{cases} 9x + y + 23z + 6w = 102 \\ 4y - 4z = -3 \\ -3x - y - 5z - 2w = -32 \\ 18x + 2y + 26z + 12w = 204 \end{cases}$

c. Por ejemplo: $\begin{cases} -4x - 4y - 4z - 2w = -84 \\ -5x + 3y + 2z + 2w = -10 \\ -5x + 2y - 2z + 2w = -31 \\ -5x + y - 6z + 2w = -46 \end{cases}$

3. 1539

4. Gastón tiene 19 años, Iván, 24 años y Eliana, 43 años.

5. En total hubo 3055 visitantes, de los cuales 2000 compraron el abono 1, 840 adquirieron el 2 y 215 compraron el 3.

6.

a. $S = \left\{ \left(\frac{7}{5} - \frac{8}{5}z; \frac{6}{5} + \frac{6}{5}z; z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$

b. $S = \left\{ \left(\frac{51}{22}; \frac{93}{165}; \frac{-294}{220} \right) \right\}$

c. $S = \left\{ \left(\frac{63}{13} - \frac{28}{13}t; 25 + \frac{25}{13}t; \frac{45}{13} + \frac{10}{13}t; t \right) / t \in \mathbb{R} \right\}$

d. $S = \phi$

7. **a.** a = 4 , b = 1,5 y c = 6. **b.** S = {(–1; 2; –3)}

8. **a.** **I.** a = 2 **II.** No existen valores de **a** para que el sistema sea compatible determinado. **III.** a ≠ 2
b. S = {(–1–3z; 1; z) / z ∈ ℝ}

9. **a.** **I.** a ∈ ℝ, b ≠ 1 y b ≠ –2.
II. a = b = 1 o a = b = –2.
III. a ≠ 1 y b = 0, o a ≠ –2 y b = –2.
b. **I.** a ≠ 4 y b ∈ ℝ.
II. a = 4 y b = 7.
III. a = 4 y b ≠ 7.

IV. $a = -\frac{2}{3}$ y $b = \frac{3}{8}$.

c. **I.** No existen valores de **a** y **b** para que el sistema resulte compatible determinado.

II. $a \neq -\frac{3}{2}$ y $b \in \mathbb{R}$, o $a = -\frac{3}{2}$ y $b \neq \frac{3}{8}$.

Capítulo 2

p | **49**

1. **a.** 1840
b. 1500
c. 2008
d. La planta donde la empresa fabrica la mayor cantidad de productos es la planta B.
e. De los televisores, se fabrica la mayor cantidad de unidades.

p | **50**

2.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

p | **51**

3.

a. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b. $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

c. $C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Las matrices simétricas son B y C, las matrices triangulares superiores son A y C, las matrices triangulares inferiores son C y D, y la única matriz diagonal es C.

p | **52**

5. **a.** Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

e. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

p | **53**

6. **a.** a = 2,5 y b = 1,25.
b. No existen valores de **a** y **b** que verifiquen la igualdad.
c. No existen valores de **a** y **b** que verifiquen la igualdad.
d. a = 0 y b = 4, o a = 8 y b = – 4.
e. Existen infinitos valores de **a** y **b** que verifiquen la igualdad. Todos ellos son b = 1 – 2a, a ∈ ℝ

p | **54**

7. **a.** No se puede realizar A + B, porque las matrices A y B no tienen el mismo orden.

b. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 2,5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 10,5 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 8,5 & 8 \end{pmatrix}$

8. Como $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$, entonces, la matriz $A + A^t$ es simétrica.

p | **55**

9. **a.** $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} =$ $= (B)_{ij} + (A)_{ij} = (B + A)_{ij}$ para cualquiera de los valores de **i** y de **j**. Luego, A + B = B + A.
b. $(A + N)_{ij} = (A)_{ij} + (N)_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij} = (A)_{ij}$ para cualquiera de los valores de i y de j.
Por lo tanto, A + N = A.

10.

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5{,}5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

p | **56**

11. **a.** $((k + t) . A)_{ij} = (k + t) . (A)_{ij} = (k + t) . a_{ij} \underset{\downarrow}{=}$

por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma de los números reales

$= k . a_{ij} + t . a_{ij} = (k . A)_{ij} + (t . A)_{ij}$ para cualquiera de los valores de **i** y de **j**. Entonces, $(k + t) . A = k . A + t . A$.

b. $((k . t) A)_{ij} = (k . t) (A)_{ij} = (k . t) . a_{ij} = k . (t . a_{ij}) \underset{\downarrow}{=}$

por la propiedad asociativa de la multiplicación de los números reales

$= k . (t . A)_{ij}$ para cualquiera de los valores de **i** y de **j**. Luego, $(k . t) . A = k . (t . A)$.

c. $((k . A)^t)_{ij} = (k . A)_{ji} = k . (A)_{ji} = k . a_{ji} = k . (A^t)_{ij}$ para cualquiera de los valores de i y de j. Por lo tanto, $(k . A)^t = k . A^t$

d. $(1 . A)_{ij} = 1 . (A)_{ij} = 1 . a_{ij} = a_{ij} = (A)_{ij}$ para cualquiera de los valores de **i** y de **j**. Entonces, $(1 . A) = A$.

e. $(0 . A)_{ij} = 0 . (A)_{ij} = 0 . a_{ij} = 0$ para cualquiera de los valores de **i** y de **j**. Luego, $0 . A = N$.

f. $(k . N)_{ij} = k . (N_{ij}) = k . 0 = 0$ para cualquiera de los valores de **i** y de **j**. Por lo tanto, $k . N = N$.

p | **57**

12. $D = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -6 \\ -8 & -21 & 14 \end{pmatrix}$

13.

a. $X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{23}{8} \end{pmatrix}$

b. No existen las matrices X e Y.

p | **58**

14. $k = 0$ y $t = 0$.

15. Para obtener el costo total de transporte de la empresa, se debe realizar el producto escalar de los vectores (1000 1550 4580 2350) y (140 230 110 230).
El mencionado costo es $1540800.

p | **59**

16. **a.** Si los vectores A, B y C son de orden **n**, entonces, $A = (a_1 ... a_n)$, $B = (b_1 ... b_n)$ y $C = (c_1 ... c_n)$. Luego: $A . (B + C) = a_1 . (b_1 + c_1) + ... + a_n . (b_n + c_n) = a_1 . b_1 + a_1 . c_1 + ... + a_n . b_n + a_n . c_n = (a_1 . b_1 + ... + a_n . b_n) + (a_1 . c_1 + ... + a_n . c_n) = A . B + A . C$

b. Si los vectores A y B son de orden **n**, entonces, $A = (a_1 ... a_n)$ y $B = (b_1 ... b_n)$. Luego, siendo **k** un número real, resulta: $k . (A . B) = k . (a_1 . b_1 + ... + a_n . b_n) = k . a_1 . b_1 + ... + k . a_n . b_n$ (1)

Como $(k . A) = (k . a_1 ... k . a_n)$, entonces, $(k . A) . B = (k . a_1) . b_1 + ... + (k . a_n) . b_n = k . a_1 . b_1 + ... + k . a_n . b_n$ (2)

Por lo tanto, debido a que las expresiones (1) y (2) son iguales, podemos afirmar que $A . (B + C) = A . B + A . C$.

17. **a.** Existen infinitos valores de **k** y **t** que verifican la igualdad. Ellos son $t = \frac{2}{7}k - \frac{6}{7}, k \in \mathbb{R}$

b. $k = 0$ y $t = 0$.

c. Hay infinitos valores de **k** y **t** que verifican la igualdad. Ellos son $k = 3t, t \in \mathbb{R}$.

d. No existe valores de **k** y **t** que verifiquen la igualdad.

e. $k = 2$ y $t = 1$.

p | **61**

18. **a.** Para realizar A . B . C, los números naturales **m**, **n**, **p** y **r** no deben cumplir ninguna condición, pues la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B, y la cantidad de columnas de B es igual a la cantidad de filas de C.

b. Para poder obtener A . C, debe ser $n = p$, y el orden de la matriz A . C es mxr.
Luego, para que se pueda multiplicar el resultado de A . C a derecha por B tiene que ser $r = n$. Entonces, para poder realizar A . B . C, debe cumplirse que $n = p = r$.

c. Para obtener B + C debe verificarse que $n = p$ y $p = r$; en consecuencia, la matriz B + C tiene orden nxn y, entonces, el producto A . (B + C) puede realizarse. Por lo tanto, la condición que debe cumplirse para poder obtener la operación anterior es: $n = p = r$.

d. Como la matriz A^t tiene orden nxm y la matriz B tiene orden nxp, para que se pueda realizar $A^t . B$ debe ser $m = n$.

e. Para que sea posible obtener B + C debe verificarse que $n = p$ y $p = r$; por consiguiente, B + C es una matriz de orden nxn. Luego, para que pueda realizarse $A^t . (B + C)$, como A^t tiene orden nxm, debe cumplirse que $m = n = p = r$.

p | **62**

19. **a.** El producto A . B no se puede realizar, porque la cantidad de columnas de A, que es 2, no coincide con la cantidad de filas de B, que es 3.

b. $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 25 & 28 \end{pmatrix}$

c. No es posible obtener el producto C . A, pues la matriz C tiene 2 columnas y la matriz A tiene 3 filas, y esos números no son iguales.

d. $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 18 & -13 \\ 26 & -20 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 0 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

f. El producto B . D no se puede realizar, ya que la cantidad de columnas de B es 2 y este número no coincide con la cantidad de filas de D, que es 3.

p | **63**

20. **a.** $B = \begin{pmatrix} a & -3c \\ c & a - 2c \end{pmatrix}$, con a y $c \in \mathbb{R}$.

b. No se puede hallar ninguna matriz B que sea conmutable con la matriz A.

21. No es posible porque como la matriz A es de orden mxn, con $m \neq n$, para poder realizar A . B y B . A , la matriz B debe ser de orden nxm, con lo cual resulta que la matriz A . B tiene orden mxm y la matriz B . A tiene orden nxn.

22. $(A . B)^t = B^t . A^t = B . A = A . B$

p | **64**

23. Si las matrices A de orden mxn y B de orden nxr son matrices triangulares superiores, entonces, se verifica que $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$ y $b_{ij} = 0$ cuando $i > j$.
Si $C = A . B$, siendo la matriz C de orden mxr, entonces, se cumple que $c_{ij} = A_i . B^j = a_{i1} . b_{1j} + ... + a_{in} . b_{nj}$.
Consideremos $i > j$ y tomemos un número natural r cualquiera entre 1 y n. Si $r < j < i$, entonces, $a_{ir} = 0$, y si $r > j$, entonces, $b_{rj} = 0$.
Luego, resulta que $c_{ij} = 0$ cuando $i > j$; en consecuencia, la matriz C es triangular superior.

24.

a. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b. No existe ninguna matriz B, tal que $B . A = \mathbb{I}$

p | **65**

25.

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{4}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \end{pmatrix}$

b. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

c. No existe la matriz C^{-1}.

p | **66**

26. Como A . B = A y A^{-1} existe, entonces, A^{-1}. (A . B) = A^{-1} . A ⇒ (A^{-1} . A) . B = I ⇒ I . B = I ⇒ B = I

27. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

p | **67**

29. $B = \begin{pmatrix} 1-2c & 2-2d \\ c & d \end{pmatrix}$, con c y d ∈ ℝ.

30.

a. $x = -\frac{7}{23}$ e $y = \frac{27}{23}$.

b. $x = \frac{39}{8}$; $y = \frac{5}{8}$; $z = \frac{11}{4}$

p | **69**

31. $\begin{pmatrix} \frac{97400}{883} \\ \frac{104850}{883} \\ \frac{111100}{883} \end{pmatrix}$

32. Sí, porque la matriz I – B es inversible.

Guía de ejercitación

1. **a. I.** 800 **II.** En la planta 1.

b. I. En febrero.

II.

Artículo	A	B	C	D
Planta 1	8	5	15	19
Planta 2	8	4	5	12

c. Durante los meses de enero y febrero juntos, el costo de fabricación en la planta 1 fue $122 y en la planta 2, $81.

p | **72**

2. **a.** A + B^t se puede realizar, ya que el orden de A y el orden de B^t es el mismo. La matriz resultante de la operación tiene orden 2 x 3.

b. No es posible obtener (A . D) . C, porque la matriz A . D es de orden 2 x 3 y la matriz C es de orden 2 x 1.

c. $(B . C)^t$ puede realizarse, debido a que el orden de B es 3 x 2 y el de C es 2 x 1. El orden de la matriz resultado es 1 x 3.

d. No es posible obtener B . C – A, pues la matriz B . C tiene orden 3 x 1 y la matriz A tiene orden 2 x 3.

e . A^t – 2B se puede realizar, ya que A^t y 2B son del mismo orden. La matriz obtenida como resultado es de orden 3 x 2.

f. No es posible obtener A . (B + C), porque como las matrices B y C tienen distinto orden, entonces, no se pueden sumar.

g. 3. (5. A) puede realizarse, debido a que para multiplicar una matriz por un escalar, el orden de dicha matriz no debe cumplir ninguna condición. El orden de la matriz resultado es 2 x 3.

h. No es posible obtener C^t . A^t, pues la matriz C^t es de orden 1 x 2 y la matriz A^t es de orden 3 x 2.

i. B . A + D se puede realizar, ya que el orden de B . A es 3 x 3 y coincide con el de D. La matriz resultante de las operaciones tiene orden 3 x 3.

j. No es posible obtener A – D . B, porque la matriz A es de orden 2 x 3 y la matriz D . B es de orden 3 x 2.

3. **a.** Falsa, porque, por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

b. Falsa, pues, por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces, $(A - B). (A + B) \neq A^2 - B^2$.

c. Verdadera, pues si las matrices A de orden mxn y B de orden nxp son matrices triangulares inferiores, entonces, se verifica que $a_{ij} = 0$ cuando i < j y $b_{ij} = 0$ cuando i < j. Si C = A . B, siendo la matriz C de orden mxp, entonces, se cumple que $c_{ij} = A_i . B^j = a_{i1}. b_{1j} + ... + a_{in} . b_{nj}$. Consideremos i < j y tomemos un número natural r cualquiera entre 1 y **n**. Si r > j > i, entonces, es $a_{ir} = 0$, y si r < j, entonces, es $b_{rj} = 0$. Luego, resulta que $c_{ij} = 0$ cuando i < j; en consecuencia, la matriz C es triangular inferior.

p | **73**

4.

a. I. Por ejemplo: $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

II. No, la matriz X no es única, existen infinitas matrices X tales que A . X = C. Otra matriz X es, por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

b. I. B = N, donde N es de orden 3 x 3.

II. Sí, la matriz B es única.

III. Sí, es cierto.

5. x = –28 e y = 24.

6. $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{12}{7} \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

p | **74**

7. **a.** El orden de la matriz X debería ser 3 x 3.

b. $X = \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{21}{2} & -4 & 8 \\ \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$

8. **a.** No existe ninguna matriz B que cumpla lo pedido.

b. $B = \begin{pmatrix} -6 & -\frac{1}{2} \\ 8 & -\frac{1}{2} \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

p | **75**

9. $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

10. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B^{-1} no existe y

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{a}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{b}{9} & -\frac{c}{9} + \frac{ab}{27} \end{pmatrix}$

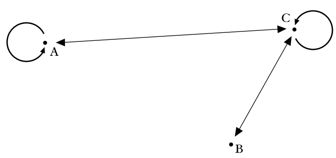
11. **a**. $k \neq \sqrt{6}$ y $k \neq -\sqrt{6}$.

b. k ≠ 1.

p | **76**

12. x = 1, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

13.



14. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} \dfrac{89875}{1401} \\ \dfrac{24275}{468} \\ \dfrac{72250}{1401} \end{pmatrix}$

Capítulo 3

p | **80**

1. Diofanto vivió 84 años.

p | **81**

2. **a.** $H \neq -2$ y $H \neq 2$. **b.** $H \neq 3$ **c.** $H \neq 0$
d. No existe ningún valor de H para que el sistema de ecuaciones lineales sea compatible determinado.

p | **82**

3. **a.** 1 **b.** 0 **c.** 0
4. **a.** $x = 0$ **b.** $x = -5$ o $x = 2$.
5. **a.** Para $k \neq -1$ y $k \neq 1$.
b. Para cualquier valor de k.

p | **84**

6. **a.** -5 **b.** -4 **c.** 12 **d.** 2 **e.** 0

p | **85**

7. En todos los casos resulta:
$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$

8. En ambos casos queda la misma expresión que se obtuvo en la actividad **7**.

p | **86**

9. **a.** $A_{23} = -8$ **c.** $A_{41} = -9$ **e.** $A_{43} = 1$
b. $A_{44} = 10$ **d.** $A_{31} = -3$

10. $\det(A) = -39$

p | **87**

11. Si A es una matriz triangular superior o inferior de orden nxn, por la propiedad 1 de la página 86 del Libro, resulta:
$\det(A) = a_{11} . a_{22} . a_{33} . \dots . a_{nn}$.
Luego, $a_{11} . a_{22} . a_{33} . \dots . a_{nn} = 0$ si y sólo si algún a_{ii} es 0.

12. Como la matriz identidad es una matriz triangular (superior e inferior), entonces, su determinante es igual al producto de las coordenadas que se encuentran en la diagonal de la matriz. Luego, debido a que en la matriz identidad todas esas coordenadas son 1, el determinante es 1.

13. **a**. 0, pues en la correspondiente matriz la fila 1 y la fila 3 son iguales.
b. 0, porque como la matriz correspondiente es triangular superior, entonces, su determinante es igual a $-3 . 0 . 1$.
c. -2, ya que si en la correspondiente matriz se intercambian las filas 1 y 2, se obtiene una matriz triangular superior y, como consecuencia del intercambio realizado, el determinante de la primera matriz cambia de signo.

p | **88**

14. Como en la matriz correspondiente la fila 2 es la fila 1 multiplicada por **a**, por la propiedad **6** de la página 88 del Libro, el determinante es cero.

15. Al desarrollar el determinante por la primera columna, resulta:
$1 . (ad - cb) - x . (d - b) + y . (c - a) = 0$ (1)
Si $c \neq a$, despejando **y** de la expresión (1),

obtenemos: $y = \dfrac{d-b}{c-a}\, x - \dfrac{ad-cb}{c-a}$,

que es la ecuación de una recta a la que pertenecen los puntos (a ; b) y (a ; d).
Si $c = a \neq 0$ y $b \neq d$, la expresión (1) se reduce a $x = a$, que es una recta vertical que pasa por los puntos (a ; b) y (a ; d).
Si $c = a = 0$, la expresión (1) se transforma en $x = 0$, que es una recta entre cuyos puntos están (0 ; b) y (0 ; d).

16. $\det(A) = \det(-A^t) = \det((-1) . A^t) = (-1)^n . \det(A^t) = (-1)^n . \det(A)$

17. Si **n** es impar, utilizando la propiedad demostrada en la actividad **16.**, resulta:
$\det(A) = (-1)^n . \det(A) = -\det(A)$; por lo tanto, es $\det(A) = 0$.

p | **89**

18. **a.** 11 **b.** -50 **c.** -242

19. Al desarrollar el determinante de A por la primera columna, obtenemos que

$\det(A) = a . \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = a . \det(B)$.

20. Si desarrollamos el determinante de A por la primera columna y luego desarrollamos, también por la primera columna, cada uno de los dos determinantes obtenidos, resulta:

$\det(A) = a . \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix} - c . \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix} =$
$= a . d \det(C) - c . b . \det(C) =$
$= (a . d - c . b) . \det(C) = \det(B) . \det(C)$

p | **90**

21. $k \neq 4$
22. $k = 3$ o $k = 4$.
23. **a. I.** $x \neq -1$ y $x \neq 0$.
II. No existe ningún valor de **x** para que B . C sea inversible, pues $\det(B) = 0$ para cualquier valor de x.
III. $x \neq -1$ y $x \neq 0$.

b. $\dfrac{1}{12}$

p | **91**

24. 5
25. **a.** 7

b. $-4 . \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & b & f \\ g & b & i \end{vmatrix}$

Este determinante no puede calcularse con el dato dado en el enunciado de la actividad **25**.

p | **92**

26. 2
27. Al realizar el producto k . A, cada fila de la matriz A queda multiplicada por **k**. Luego, como la matriz k . A es de orden nxn, entonces, por la propiedad **6**. de la página 88 del Libro, al calcular el determinante de k . A, podemos extraer una **k** de cada una de las **n** filas. Por lo tanto: $\det(k . A) = k^n . \det(A)$.
28. Por ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

p | **93**

29. **a.** -14 **b.** -30

p | **94**

30. $k = -\dfrac{7}{2}$

31. **a.** $-\dfrac{4}{27}$ **b.** $-\dfrac{1}{8}$ **c.** $-\dfrac{3}{16}$

p | **95**

32. **a. I.** El sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado para cualquier valor de **k**.
II. No existe ningún valor de **k**, tal que el sistema sea compatible indeterminado.
III. No existen valores de **k** para que el sistema de ecuaciones lineales sea incompatible.

b. I. $k \neq \dfrac{13}{12}$ **II.** $k = \dfrac{13}{12}$

III. No existe ningún valor de **k** para el cual el sistema sea incompatible.

p | **96**

33. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

34. **a.** $k \neq -2$ y $k \neq 2$.

b. $(B . A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} & -\dfrac{3}{8} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

35. Para k = −1 o k = 2.

p | **97**

36. **a.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$

b. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

c. La matriz C no es inversible.

d. $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 & -2 \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

p | **98**

37. **a.** x = 2, y = −1 y z = 1.

b. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$ y $x_4 = -\frac{3}{2}$.

c. No es posible utilizar la Regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales, porque el determinante de la matriz asociada a dicho sistema es 0.

p | **100**

38. **a.** El mensaje descifrado es ESTUDIEMOS MATEMÁTICAS.

b. 57;58; 20; 76; 52; 40; 46; 46; 16; 49; 47; 21; 28; 25; 15; 51; 47; 25.

Guía de ejercitación

1. **a.** El determinante es 15 y la matriz es inversible.
b. Como el determinante es 0, la matriz no tiene inversa.
c. El determinante es −13 y la matriz posee inversa.
d. Debido a que el determinante es 0, la matriz no es inversible.
e. El determinante es −2 y la matriz es inversible.
f. Como el determinante es 0, entonces, no existe la matriz inversa de la matriz dada.

2. **a.** 360

p | **102**

b. −9 **d.** −30
c. 72 **e.** −90

3. 20
4. −3
5. x = −2 o x = −1.

p | **103**

6. **a.** H ≠ −2 y H ≠ 2. **c.** H ≠ −1 y H ≠ 0.
b. H ∈ ℝ

7. Si desarrollamos el determinante de A por la cuarta fila y luego desarrollamos por la primera fila el determinante obtenido, resulta:

$$\det(A) = f \,.\, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{vmatrix} = f \,.\, a \,.\, \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} =$$

$= f \,.\, e \,.\, \det(B)$

8. **a.** Para $k \neq -\frac{3}{2}$ y $k \neq 0$.

b. No existe ningún valor de **k** tal que el sistema de ecuaciones lineales sea compatible determinado.

9. **a.** Para k = −3 o k = −2 o k = 3.
b. Para k = 0 o k = 2.

p | **104**

c. Para k = −4 o k = −1 o k = 0.

10. **a.** $k \neq \frac{1}{10}$ y $k \neq \frac{1}{5}$.

b. No importa qué matriz es B, sino que el determinante de la matriz A^{2003} sea distinto de cero, con lo cual los valores de **k** para el ítem **b.** son los mismos que para el ítem **a.**

11. **a.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = F_2 - aF_1 \\ F_3 - a^2F_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= F_3 - (a+b)\,F_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)\,(c-b) \end{vmatrix} =$$

$= (b-a)\,(c-a)\,(c-b)$

b. a = b o a = c o b = c.

p | **105**

12. **a.**

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{por la propiedad 8} \\ \text{de la página 89.}}}{=}$$

$$= \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & 1+b & c & d \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{desarrollando por} \\ \text{la columna 1}}}{=}$$

$$= 1 \,.\, \begin{vmatrix} 1+b & c & d \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \,.\, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 1 + b + c + d + a$

b.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{por la propiedad 7} \\ \text{de la página 88}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ c & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ b & a & a \\ c & b & b \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a & c & a \\ b & a & b \\ c & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c \\ c & c & a \\ a & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b & c & c \\ c & a & a \\ c & b & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{por la propiedad 3} \\ \text{de la página 86.}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{por la propiedad 4} \\ \text{de la página 87.}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{por la propiedad 4} \\ \text{de la página 87.}}}{=}$$

$$= 2 \,.\, \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

13. Supongamos que existe una matriz C inversible de orden 2x2 que verifica que A . C = C . B. Luego, resulta:
det(A . C) = det(C . B) ⇒ det(A) . det(C) = det(C) . det(B) ⇒ −16 . det(C) = det(C) . 16 ⇒ det(C) = 0.
Entonces, la matriz C no es inversible, lo cual contradice una de las condiciones iniciales. Por lo tanto, dicha matriz C no existe.

p | **106**

14. **a.** −3 **b.** 1144

15. **a.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} \frac{3}{22} & -\frac{3}{22} & -\frac{3}{44} & \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{143} & -\frac{1}{11} & \frac{31}{286} & -\frac{1}{143} & \frac{1}{143} \\ -\frac{2}{143} & \frac{1}{11} & \frac{81}{572} & \frac{1}{143} & -\frac{1}{143} \\ -\frac{56}{143} & \frac{6}{11} & -\frac{5}{143} & \frac{28}{143} & \frac{115}{143} \end{pmatrix}$

Libro 8 Capítulo 1

p | **13**

1. **a.** La población es el conjunto de técnicos y jugadores de fútbol de primera división de la Argentina.
b. La muestra es la cantidad de encuestados, es decir, 58 personas.
c. De la encuesta se puede inferir que la mayoría de los técnicos y jugadores de fútbol de primera división de la Argentina está en contra de la opinión de Tabárez.

p | **14**

2. **a.** La característica es una variable, pues se cuenta la cantidad de libros que se prestan.
b. La característica es un atributo, debido a que los datos son morocho, rubio, pelirrojo, y demás.
c. La característica es una variable, porque se cuenta la cantidad de hermanos.
d. La característica es un atributo, pues los datos son colores.
e. La característica es un atributo, debido a que los datos son soltero, casado, divorciado y viudo.
f. La característica es un atributo, porque si bien los datos son números, éstos son los nombres de los menús; por lo tanto, no se están contando cantidades.

p | **15**

3. **a.**

Edad	18	19	20	21	22	23	24	25
Frecuencia	4	4	1	1	3	8	6	4
Frecuencia relativa	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$

Edad	26	29	30	32	33	35	36	38	40
Frecuencia	4	2	1	3	2	1	1	2	3
Frecuencia relativa	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{50}$

b. La moda es 23 años.

4. **a.** La frecuencia relativa que falta en la tabla es

$\frac{19}{315}$, pues $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{9} - \frac{3}{7} = \frac{19}{315}$

b. La moda es el dato 5.

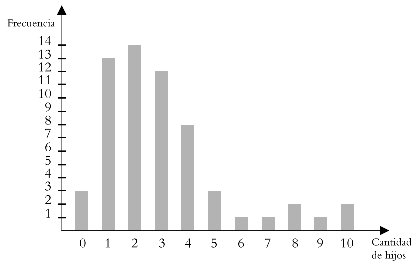
p | **16**

5. **a.**

Cantidad de hijos	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	3	13	14	12	8	3
Frecuencia relativa	$\frac{1}{20}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{20}$

Cantidad de hijos	6	7	8	9	10
Frecuencia	1	1	2	1	2
Frecuencia relativa	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$

b. La moda es 2 hijos.
c.



p | **17**

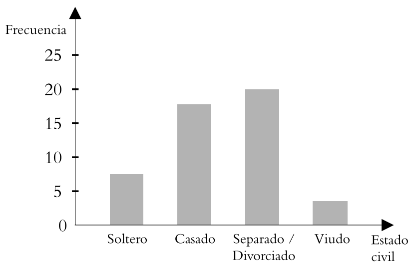
6. **a.**

Columna	1ª columna	2ª columna	3ª columna
Frecuencia relativa	0,28	0,165	0,555

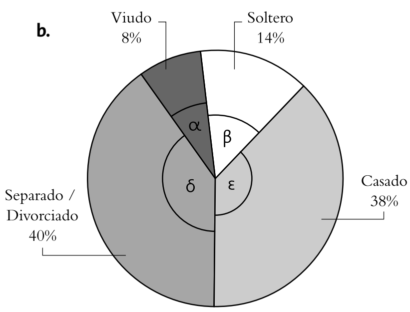
b. La moda es 3ª columna.
c. La ruleta no estaba equilibrada, porque, si lo hubiera estado, la frecuencia relativa de cada columna debería haber sido la misma.

p | **18**

7. **a.**



b.



$\hat{\alpha} = 28{,}8°$ $\hat{\beta} = 50{,}4°$

$\hat{\delta} = 144°$ $\hat{\varepsilon} = 136{,}8°$

b. La moda es separado/divorciado.
c. La mayoría de los encuestados son adultos, porque dicha mayoría son los que están casados o separados/divorciados.

p | **19**

8. **a.** Como $\overline{x} = 26{,}08$, entonces, la edad promedio de las parturientas es de 26 años.

9. Las personas encuestadas tenían en promedio 3 hijos, pues $\overline{x} = 3{,}0167$.

10. $\overline{x} = 3{,}35$

p | **20**

11. **a.** 43,75
b. El promedio es 8,75. k, pues

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} kx_i}{n} = \frac{k.\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = k\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = k\,.\,8{,}75$$

c. 13,75

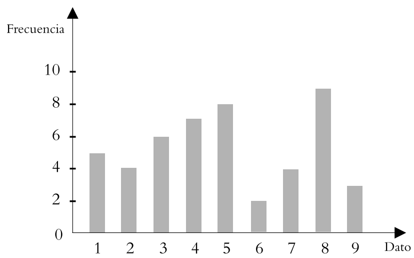
d. El promedio es 8,75 + k, porque

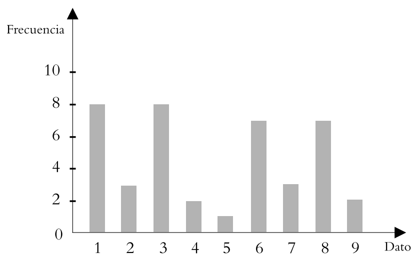
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i + k)}{n} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) + n\,.\,k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{k\,.\,\cancel{n}}{\cancel{n}} = 8{,}75 + k$$

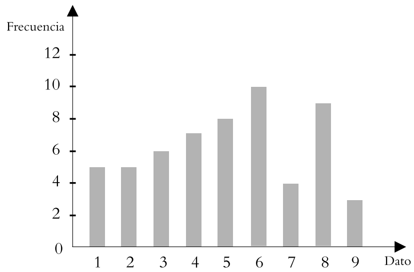
p | **21**

12. **a.** $\overline{x} = 4{,}9583$, Me = 5 y la moda es 8.
b. $\overline{x} = 4{,}585$, Me = 4 y, es una distribución de frecuencias bimodal con modas 1 y 3.
c. $\overline{x} = 5{,}053$, Me = 5 y la moda es 6.

13.







p | **23**

14. **a.** 512,487 **b.** 6,267

15. **a.** La variable es discreta.
b. La variable es continua.
c. La variable es continua.
d. La variable es discreta.

p | **24**

16. **a.** Con un litro de nafta, el menor recorrido es 7,5 kilómetros y el mayor recorrido es 14 kilómetros.

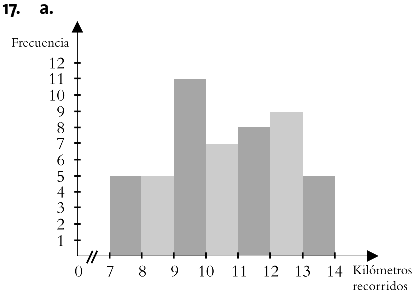
b.

Intervalos de clase	(7 ; 8]	(8 ; 9]	(9 ; 10]	(10 ; 11]
Frecuencia	5	5	11	7

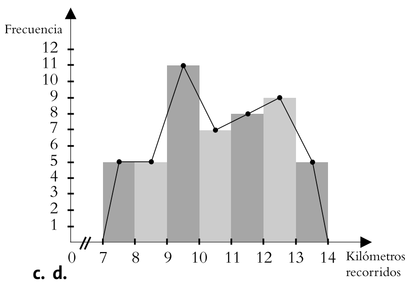
Intervalos de clase	(11 ; 12]	(12 ; 13]	(13 ; 14]
Frecuencia	8	9	5

p | **25**

17. **a.**



b.



c. d.

Intervalos de clase	(7 ; 8]	(8 ; 9]	(9 ; 10]	(10 ; 11]
Marca de clase	7,5	8,5	9,5	10,5
Frecuencia relativa	0,1	0,1	0,22	0,14
Frecuencia acumulada	5	10	21	28

Intervalos de clase	(11 ; 12]	(12 ; 13]	(13 ; 14]
Marca de clase	11,5	12,5	13,5
Frecuencia relativa	0,16	0,18	0,1
Frecuencia acumulada	36	45	50

p | **26**

18. **a.** $\bar{x}$ = 10,6 y el intervalo modal es (9 ; 10].

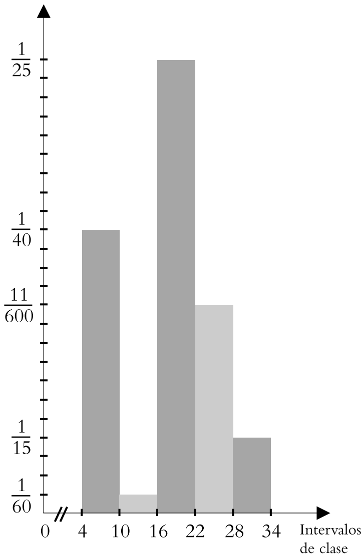
19. **a.** 100

b.

Intervalos de clase	(4 ; 10]	(10 ; 16]	(16 ; 22]
Frecuencia	0,15	0,1	0,24

Intervalos de clase	(22 ; 28]	(28 ; 34]
Frecuencia	0,11	0,4

c.



p | **27**

20. **a.** 10567

b. 10317

c. Como $\bar{x}$ = 683,87, entonces, el promedio de empleados de todas las empresas es 684.

d. El intervalo modal es (0 ; 999] y significa que la mayor cantidad de empresas consultadas tiene entre 0 y 999 empleados.

e. La mediana es el dato número 5284, que es 500 empleados.

p | **28**

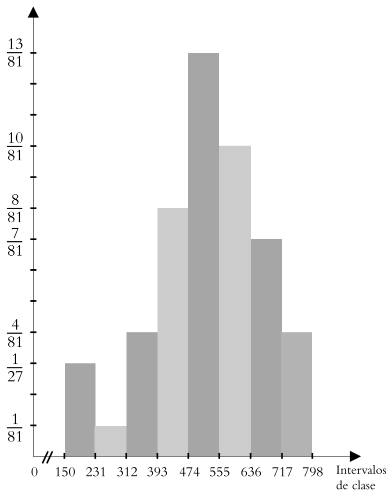
21. **a.**

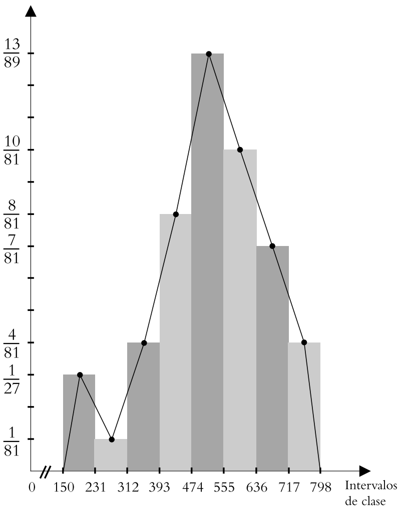
Intervalos de clase	[150;231)	[231;3 12)	[312;393)
Frecuencia	3	1	4

Intervalos de clase	[393;474)	[474;555)	[555;636)
Frecuencia	8	13	10

Intervalos de clase	[636;717)	[717;798)
Frecuencia	7	4

b.





c. $\bar{x}$ = 522,6, Me = 514,5 y el intervalo modal es [474 ; 555).

p | **29**

22. **a.** Para la actividad **20.** es v = 424503,8502 y para la actividad **21.** es v = 20273,49.

23.
$$v = \frac{\sum_{i=1}^{r}(x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{r}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i} =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{r}(x_i^2 f_i - 2x_i\bar{x} f_i + \bar{x}^2 f_i)}{\sum_{i=1}^{r} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i} - \frac{\sum_{i=1}^{r} 2x_i\bar{x} f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i} +$$
$$+ \frac{\sum_{i=1}^{r} \bar{x}^2 f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i^2 f_i}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{r} x_i f_i}{n} + \bar{x}^2\frac{\cancel{\sum_{i=1}^{r} f_i}}{\cancel{\sum_{i=1}^{r} f_i}} =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 f_i - 2\bar{x}.\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

24. $\bar{x}$ = 3,3, Me = 3,5, las modas son 1 y 4 y v = 4,81.

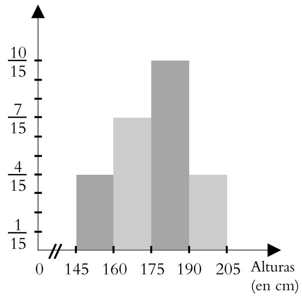
p | **30**

25. **a.** Curso A: $\bar{x}$ = 175,9, Me = 182,5, el intervalo modal es [175 ; 190) y σ = 14,122.

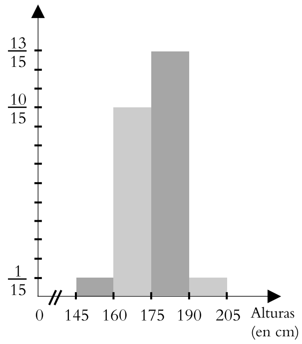
Curso B: $\bar{x}$ = 175,9, Me = 182,5, el intervalo modal es [175, 190) y σ = 9,562.

b. El curso B, porque el desvío estándar para los datos de dicho curso es menor que el correspondiente para los datos del curso A.

c. Para el curso A, el histograma es



Para el curso B, el histograma es



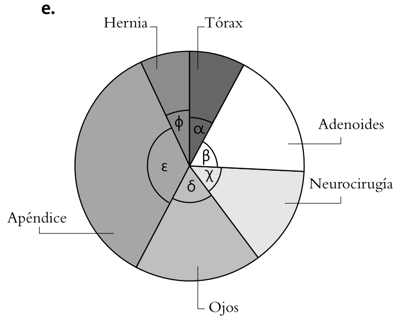
Guía de ejercitación

1. **a.** La población en la estadística es la población de la Argentina.
   b. La muestra es la cantidad de personas encuestadas, es decir, 19026 personas.
   c. No, porque la mayoría de la gente no confía en el banco.
2. Las características de los ítem **a.** y **e.** son atributos, las de **c.** y **d.** son variables discretas y las de los ítem **b.** y **f.** son variables continuas.
3. **a.** La población es las personas que se operan en el hospital.
   b. La característica estudiada es un atributo, porque es el tipo de operación realizada.
   c. La moda es la operación de apéndice.
   d.

Tipo de operación	Tórax	Adenoides	Neurocirugía
Frecuencia relativa	$\frac{25}{329}$	$\frac{58}{329}$	$\frac{45}{329}$

Tipo de operación	Ojos	Apéndice	Hernia
Frecuencia relativa	$\frac{59}{329}$	$\frac{120}{329}$	$\frac{22}{329}$

e.



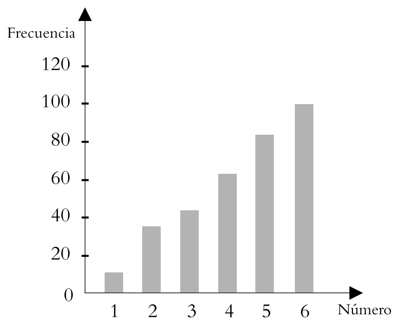
$\hat{\alpha} = 28°48'$ $\hat{\beta} = 64°48'$ $\hat{\chi} = 50°24'$

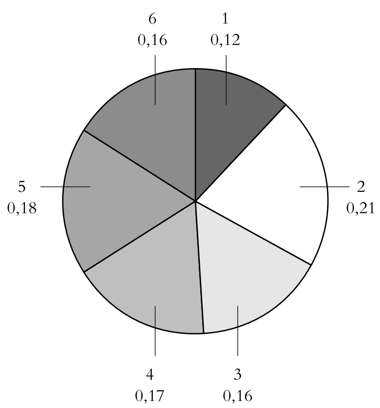
$\hat{\delta} = 64°48'$ $\hat{\varepsilon} = 126°$ $\hat{\phi} = 25°12'$

4. **a.** $\bar{x} = 3{,}56$. Podemos considerar, entonces, que en promedio salió el 4.
   Me = 4 y la moda es 2.
   b.

Número	1	2	3	4	5	6
Frecuencia relativa	0,12	0,21	0,16	0,17	0,18	0,16
Frecuencia acumulada	12	33	49	66	84	100

   c. Convendría trabajar con la tabla de distribución de frecuencias acumuladas, porque ésta permite acumular la frecuencia de todos los datos desde el primero de ellos hasta el dato que se quiere considerar.
   d. v = 2,7064 y σ = 1,645.
   e.

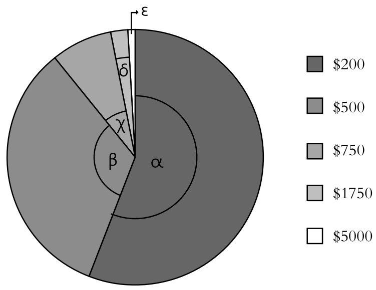




5. **a.** \$200 **b.** 487 personas.
   c.

Sueldo (en \$)	200	500	750	1750	5000
Frecuencia acumulada	302	452	487	497	500

   d.



$\hat{\alpha} = 181°12'$ $\hat{\beta} = 108°$ $\hat{\chi} = 25°12'$

$\hat{\delta} = 7°12'$ $\hat{\varepsilon} = 3°36'$

6. **a.** a = 2 y b = 6
   b. Me = 2 y la moda es 2.

p | **34**

7. **a.**

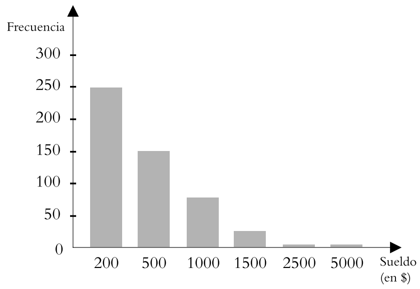
Intervalos de clase	(1,72;1,726]	(1,726;1,732]
Frecuencia	3	7

Intervalos de clase	(1,732;1,738]	(1,738;1,744]
Frecuencia	10	7

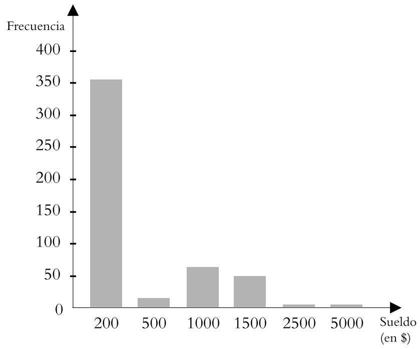
Intervalos de clase	(1,744;1,75]
Frecuencia	3

   b. El intervalo modal es (1,732; 1,738], $\bar{x} = 1{,}735$, Me = 1,735 y σ = 0,006.
8. La sexta persona pesa 20 kg.
9. **a.** La media aritmética es $3 \,.\, \bar{x}$ y el desvío estándar es 3σ.
   b. La media aritmética es $\bar{x} + 9$ y el desvío estándar es σ.
   c. La media aritmética es $3 \,.\, \bar{x} + 9$ y el desvío estándar es 3σ.
10. **a.** $\bar{x} = 361$ y Me = 350.
    b. $\bar{x} = 415{,}15$ y Me = 402,5.
    c. La nueva media aritmética en abril es 222.
11. No existe ningún conjunto de datos con las condiciones pedidas, pues si el conjunto de datos considerado y el conjunto de datos por hallar tienen la misma media aritmética y cuatro de los cinco datos de ambos conjuntos coinciden, entonces, el quinto dato también debe coincidir.
12. **a.** Empresa 1: $\bar{x} = 500$, Me = 350 y la moda es 200.
    Empresa 2: $\bar{x} = 500$, Me = 200 y la moda es 200.
    Empresa 3: $\bar{x} = 500$, Me = 500 y la moda es 500.

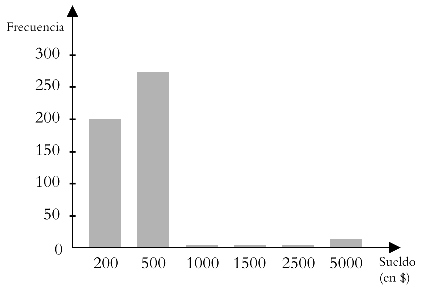
b. Empresa 1



Empresa 2



Empresa 3



c. Empresa 1: σ = 484,77.
Empresa 2: σ = 600,66.
Empresa 3: σ = 716,24.
Luego, la media aritmética es más representativa de los datos en la empresa 1, pues esta empresa es la que tiene el menor desvío estándar.

13. Al grupo A le corresponde el gráfico 2, ya que es el gráfico donde los datos están más agrupados; al grupo B le corresponde el gráfico 1, pues es el gráfico cuyos datos están más dispersos y al grupo C le corresponde el gráfico 3.

14. Al dueño de la fábrica le convenía comprar la máquina A, porque si bien para las tres máquinas la media aritmética es 3, la máquina A es la que posee el menor desvío estándar.

Capítulo 2

p | **41**

1. Se pueden combinar de 24 maneras diferentes.

2. Por ejemplo, para hacer un cartel de metal se pueden elegir dos clases de formato: tres colores para el fondo, dos tipos de letras y dos colores para pintarlas.
¿Cuántos carteles metálicos diferentes se pueden hacer?

p | **42**

3. Analía puede elegir su clave entre 3024 opciones.

4. Los integrantes del equipo pueden construir 120 banderas diferentes.

5. Las amigas tienen 6 maneras de alinearse para que les tomen la foto.

p | **43**

6. Si consideramos que los números telefónicos sólo pueden comenzar con 4, 5 o 6, entonces, hay 15120 números de teléfono diferentes.

7. En la fila, los alumnos pueden ordenarse de 32! maneras distintas.

p | **44**

8. **a.** Pueden hacerlo de 15! formas.
b. Tienen 13! . 3! formas de ordenarse en ese caso.

9. **a.** El empleado puede ubicar los libros de 11! maneras diferentes.
b. El empleado puede acomodar los libros de 7! . 5! formas distintas.

p | **45**

10. **a.** 720 números.
b. 120 números.
c. 24 números.

11. Los corredores pueden distribuirse el primero, segundo y tercer puesto de 336 maneras.

12. 24024 turnos diferentes.

p | **46**

13. Por ejemplo, un anticuario tiene 10 objetos distintos para acomodar en un estante de una vitrina. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo?

14. Por ejemplo, entre los 10 alumnos de un curso de inglés, el profesor debe elegir 3 para asignarles las siguientes tareas: tipear una traducción en una computadora, imprimirla y enviarla por E-mail. Si cada uno de los alumnos seleccionados realizará una sola de las tareas, ¿de cuántas maneras puede el profesor realizar la elección?

15. Porque si **n** fuera igual a **m**, se trataría de una permutación de **m** elementos y si **n** fuera mayor que **m**, no se podrían tomar **n** elementos entre los **m**.

p | **47**

16. **a.** 6720 mensajes.
b. Los detectives tienen acceso a 262144 mensajes.

17. Por ejemplo, Rita cocinó una torta que quiere rellenar en 3 capas y dispone para eso de 10 rellenos diferentes.
¿Cuántas formas tiene Rita de rellenar su torta si puede repetir un mismo relleno en las distintas capas?

p | **48**

18. **a.** 1080 números.
b. 180 números.
c. 30 números.
d. 300 números.

19. Los premios pueden otorgarse de 24360 maneras diferentes.

p | **49**

20. **a** $\binom{m}{1} = \dfrac{m!}{1!\,.\,(m-1)!} = \dfrac{m\,.\,\cancel{(m-1)!}}{1\,.\,\cancel{(m-1)!}} = m$

b. $\binom{m}{0} = \dfrac{m!}{0!\,.\,m!} = \dfrac{\cancel{m!}}{1\,.\,\cancel{m!}} = 1$

21. **a.** La elección puede hacerse de 6840 formas diferentes.
b. Los candidatos pueden ser seleccionados de $\binom{20}{3}$, es decir, 1140, maneras distintas.

22. **a.** $\binom{10}{4}.\binom{6}{3}.\binom{3}{2}$, o sea, 12600, números diferentes.
b. $\binom{9}{3}.\binom{6}{3}.\binom{3}{2}+\binom{9}{4}.\binom{5}{3}$, es decir, 7560.

23. **a.** Paula puede elegir a sus invitados de 5733 formas diferentes.
b. Teniendo en cuenta el ítem **a.**, Paula tiene para seleccionar 364 grupos de comensales.

24. **a.** 228 señales.
b. 780 señales.
c. 14840 señales.
d. 25200 señales.

25. **a.** $\binom{13}{4}.\binom{9}{2}.7! = 129729600$
b. $\binom{12}{4}.\binom{8}{2}.6! = 9979200$

p | **52**

26. **a.** $\binom{22}{3}.\binom{5}{3}.6!$, es decir, 11088000 anagramas.
b. $\binom{22}{3}.3!.\binom{5}{3}.3!.2$, o sea, 1108800.

27. **a.** $\binom{n}{2}$, es decir $\dfrac{n\,.\,(n-1)}{2}$ rectas.
b. $\binom{n}{3}$, o sea $\dfrac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)}{6}$ triángulos.
c. n – 1 rectas.

p | **53**

28. **a. I.** La elección puede realizarse de $\binom{40}{6}$ maneras.

II. La elección puede hacerse de $\binom{38}{5} + \binom{38}{3}$, es decir, 510378, formas.

b. Los alumnos pueden ser seleccionados de

$\binom{40}{14}$ maneras.

29. **a.** Andrea puede guardar las bolitas de $\binom{22}{15}$ formas.

b. Andrea tiene $\binom{14}{7}$ maneras.

p | **54**

30. $\binom{6}{1}$ **31.** $\binom{10}{3}$

p | **55**

Guía de ejercitación

1. En esa panadería se preparan 64 variedades de sándwiches.

2. **a.** La aparición de las bandas se puede ordenar de 9!, o sea, 362880, maneras.

b. Hay 8! formas.

3. Los chicos tienen que elegir su camiseta entre 2 . 2 . 2 . 3!, es decir, 48, modelos diferentes.

4. **a.** Las parejas pueden sentarse de 8!, o sea, de 40320, maneras.

b. 4! . 2! . 2! . 2! . 2! = 384

c. Disponen de 5! . 4! . 4!, es decir, 69120, opciones.

5. Por ejemplo, en una heladería se elaboran 59 gustos de helado. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar dichos gustos en una lista?

6. **a.** Los amigos pueden hacerlo de 24 maneras.

b. Los amigos pueden sentarse de $\binom{4}{3}$. 3! , es decir, 24, maneras.

7. **a.** Mara puede hacer $\binom{96}{6}$ elecciones.

b. Mara tiene $\binom{96}{6}$. 6! opciones.

8. **c.** Malena puede obtener $\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}$,

o sea, 92, sabores diferentes.

9. **a.** Se pueden formar 6^6, es decir, 46656, números.

b. Existen 6!, o sea, 720, números.

c. Hay 6^4, es decir, 1296, números.

d. Se pueden formar 6^3 . 3, o sea, 648, números.

e. Existen 3 . 6^2, es decir, 108, números.

f. Hay 18 números.

10. **a.** Se pueden formar 1080 números.

b. En 300 de ellos.

c. 360

11. $\binom{200}{5}$ selecciones diferentes.

12. Los amigos pueden elegir sentarse de $\binom{20}{6}$. 6! maneras.

13. **a.** 10!

b. $\binom{10}{5}$. 5!

c. $\binom{11}{4}$. 7!

d. $\binom{15}{2} . \binom{13}{3} . \binom{10}{2} . \binom{8}{2}$. 6!

14. **a.** $\binom{7}{3} . \binom{4}{2}$. 2!

b. $\binom{6}{3} . \binom{3}{2} + \binom{6}{3}$. 3!, o sea,180.

15. **a.** El gerente puede hacerlo de $\binom{8}{2} . \binom{12}{3}$ maneras.

b. El gerente de personal puede seleccionar al grupo de $\binom{8}{3} . \binom{12}{3} - \binom{12}{3} . \binom{5}{1}$ maneras diferentes.

c. El gerente puede hacer la elección de $\binom{8}{3} . \binom{12}{3} - \binom{7}{2} . \binom{11}{2}$ maneras.

d. El gerente de personal puede hacer la selección de $\binom{8}{3}$. 10 maneras distintas.

16. A las palomas se las puede colocar en las jaulas de $\binom{23}{9}$ formas diferentes.

17. **a.** Se pueden sentar de 6! . 5!, o sea, 86400, maneras.

b. Pueden sentarse de 5! . 5! . 2, es decir, 28800, maneras.

18. Los premios pueden ser asignados de $\binom{50}{3}$. 3! . $\binom{47}{5}$ maneras.

19. La dirección puede entregar los ejemplares de $\binom{10}{5} . \binom{5}{3}$ maneras diferentes.

20. Por ejemplo, una productora de televisión tiene que seleccionar 7 extras para un programa. Si se postulan 25 personas, ¿de cuántas formas puede la productora realizar la selección?

21. La vendedora de un negocio tiene que ordenar en un estante 4 carteras idénticas, 2 bolsos también idénticos y 4 mochilas de diferente color. ¿De cuántas maneras dispone la vendedora para ordenar esos artículos?

22. Se pueden formar $\binom{20}{2}$, o sea, 190, rectas.

23. Es posible determinar $\binom{20}{2}$. 12 + $\binom{12}{2}$. 20 , es decir, 3600, triángulos.

24. $\binom{11}{7}$, o sea, 330.

25. $\binom{11}{7} . 5^4 . 8^7$

26. $44\sqrt{3} + 76$

27. Si utilizamos la fórmula del Binomio de Newton, entonces, resulta:

a. $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+ \dots +\binom{m}{m}=$

$= (1+1)^m = 2^m$

b. $\binom{m}{0}-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+ \dots =$

$= (1-1)^m = 0$

Capítulo 3

p | **65**

1. **a.** Si en la experiencia de tirar una moneda dos veces, llamamos **c** al resultado cara y **s** al resultado ceca, obtenemos que M = {cc; cs; sc; ss} y #M = 4.

b. M = { 1; 2; 3; 4; 5; 6} y #M = 6.

c. En la experiencia de tirar una moneda y un dado, llamemos **c** al resultado cara y **s** al resultado ceca. Luego, resulta: M = {c1; c2; c3; c4; c5; c6; s1; s2; s3; s4; s5; s6} y #M = 12.

d. M = {1de corazón; 2 de corazón; ... } y #M = 52.

e. M = {(1; 1 de oro) ; (1; 2 de oro); ... } y #M = 6 . 48 = 288.

f. Si llamamos **v** al resultado bolita verde, **r** al resultado bolita roja y **a** al resultado bolita azul, obtenemos que M = {v1 ; v2 ; v3; v4; v5; r1; r2; a1; a2; a3} y #M = 10.

g. M = {(0;1;2) ; (0; 1;3); (0;1;4); ... ; (2;1;0) ;...} y #M = 720.

p | **66**

2. **a.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **e.** $\frac{1}{24}$ **g.** $\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{2}$ **d.** $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ **f.** $\frac{3}{10}$

3. **a.** $\frac{7}{8}$ **b.** $\frac{3}{8}$ **c.** $\frac{1}{4}$

p | **67**

4. **a.** $\frac{1}{32}$ **b.** $\frac{22}{141}$ **c.** $\frac{9}{376}$ **d.** $\frac{9}{376}$

5. Como P(A) = $\frac{1}{8}$, P(B) = $\frac{1}{4}$ y P(A∩B) = 0,

entonces, los sucesos A y B no son independientes.

6. Como P(C) = $\frac{2}{11}$, P(D) = $\frac{4}{11}$ y P (C/D) = $\frac{4}{55}$,

los sucesos A y B no son independientes.

7. **a.** $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{11}{36}$ **c.** $\frac{1}{3}$

p | **67**

8. **a.** $\frac{7}{12}$ **b.** $\frac{1}{12}$ **c.** $\frac{1}{26}$ **d.** $\frac{7}{12}$

9. **a.** $\frac{44}{45}$

p | **70**

10. **a.** Los sucesos A y B no son independientes.

b. P (A∩B) = $\frac{2}{7}$ y P (A/B) = $\frac{2}{5}$.

11. **a.** $\frac{5}{15}$ **b.** $\frac{5}{15}$ **c.** $\frac{2}{15}$ **d.** $\frac{5}{9}$ **e.** $\frac{2}{5}$ **f.** $\frac{4}{15}$

p | **71**

12. **a.** $\frac{5}{9}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{7}{8}$

13. $\frac{2}{3}$

p | **72**

14. **a.** Por ejemplo:

Cantidad de tiradas	20	30	40	50
Cantidad de caras	11	16	19	28
Frecuencia relativa	0,55	0,53	0,475	0,56

b. La probabilidad teórica de obtener cara al lanzar la moneda es 0,5 y las frecuencias relativas anteriores son valores próximos a dicha probabilidad teórica.

15. **a.** Para realizar la simulación pedida podemos, por ejemplo, multiplicar por 5 el número que resulta del *random*, a continuación sumar 1 y por último considerar la parte entera del resultado de las operaciones anteriores. De esta manera, obtenemos un número entero mayor o igual que 1 y menor o igual que 5. Luego, realizamos 50 veces el procedimiento anterior asignando, en cada una de ellas el 1 a la actriz 1, el 2 a la actriz 2, el 3 al actor, el 4 al cantante 1 y el 5 al cantante 2.
b. En una simulación efectuada, la frecuencia relativa obtenida fue $\frac{21}{50}$, o sea, 0,42, que es un valor próximo a la probabilidad teórica, que es $\frac{8}{20}$, es decir, 0,4 .

16. Para simular la experiencia requerida, primero establecemos un orden para las cartas. Por ejemplo, asignamos el 1 al 1 de oro, el 2 al 2 de oro, etc. Luego, en una planilla de cálculo de una computadora, consideramos la función aleatoria. Al número que resulta de utilizar dicha función lo multiplicamos por 48, a continuación sumamos 1 y por último tomamos la parte entera del resultado de las operaciones anteriores. De esta forma, obtenemos un número entero que es mayor o igual que 1 y menor o igual que 48, y que fue previamente asignado a una de las 48 cartas del mazo.

p | **73**

17. La frecuencia relativa de cara es 0,474 y la de ceca es 0,526.
Como la cantidad de repeticiones de la experiencia de lanzar una moneda es 1000, cada una de las frecuencias relativas anteriores debería ser un número mucho más próximo a 0,5 que es la probabilidad teórica de que salga cara y la probabilidad teórica de que salga ceca. Por lo tanto, la moneda no está equilibrada. A cada cara de dicha moneda puede asignársele como probabilidad de salir la correspondiente frecuencia relativa mencionada anteriormente.

18. **a.** 0,3 **b.** 0,46 **c.** $\frac{6}{25}$ **d.** 0,5 **e.** $\frac{5}{9}$

p | **74**

19. **a.** $P(R) = \frac{3}{8}$ **d.** $P(D/A) = 0$ **f.** $P(N \cap T) = \frac{1}{8}$
b. $P(U) = \frac{3}{8}$ **e.** $P(T) = \frac{1}{4}$ **g.** $P(R/D) = \frac{1}{3}$
c. $P(U/R) = \frac{2}{3}$

20. **a.** $P(T) = \frac{1}{4}$ **d.** $P(T/V) = \frac{1}{4}$ **f.** $P(V/D) = \frac{2}{3}$
b. $P(R) = \frac{3}{8}$ **e.** $P(D) = \frac{3}{8}$ **g.** $P(R/U) = \frac{2}{3}$
c. $P(V \cap T) = \frac{1}{8}$

p | **75**

21. $\frac{23}{38}$

22. 0,01973

23. 0,77

p | **76**

24. $\frac{2}{3}$

p | **77**

25. **a.** 0,956 **b.** 0,998

26. **a.** 0,051

Guía de ejercitación

1. **a.** $\frac{26}{59}$ **b.** $\frac{80}{177}$ **c.** $\frac{158}{177}$

2. **a.** 0,1377 **b.** 0,4747 **c.** 0,6329

3. **a.** $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$ y $P(A/B) = \frac{1}{5}$.
b. Los sucesos A y B no son independientes porque $P(A/B) = \frac{1}{5}$ y $P(A) = \frac{2}{9}$.
c. $P(C) = \frac{1}{3}$ **d.** $P(A \cup C) = \frac{5}{9}$

p | **80**

4. **a.** P (B) = 0,25 **b.** P ((A∩B)/A) = 0,25

5. **a.** 0,000026 **b.** 0,00002653 **c.** 0,999999047

6. **a.** 216 **b.** A = {(1; 1; 1)} **c.** B = {(6; 6; 6)}
d. C = {(6; 6; 1); (6; 1; 6); (1; 6; 6); (5; 6; 2); (5; 2; 6); (6 ;5; 2); (2; 5; 6); (6; 2; 5); (2; 6; 5); (4; 6; 3); (4; 3; 6); (6; 4; 3); (6; 3; 4); (3; 4; 6); (3; 6; 4); (4; 4; 5); (4; 5; 4); (5; 4; 4); (5; 5; 3); (5; 3; 5); (3; 5; 5)}
e. $P(A) = \frac{1}{216}$, $P(B) = \frac{1}{216}$ y $P(C) = \frac{21}{216}$.
f. $\frac{6}{216}$

7. **a.** 0,0000181 **c.** 0,57023 **e.** 0,62472
b. 0,0612 **d.** 0,74291

8. **a.** $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** $\frac{3}{4}$

p | **81**

9. **a.** 0,3 **b.** 0,69 **c.** 0,24 **d.** 0,31

10. **a.** 0,03089 **b.** 0,0117 **c.** 0,50322 **d.** 0,0171

11. **a.** 0,2553 **b.** 0,234 **c.** 0,234 **d.** 0,8387

12. **a.** $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{3}{4}$

p | **83**

13. **a.** $\frac{1}{100000}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{19}{1000000}$

14. $\frac{1}{7}$

15. **a.** 0,05 **b.** 0,5 **c.** 0,9375

p | **84**

16. **a.** $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{8}{27}$ **c.** $\frac{35}{81}$ **d.** 1

17. **a. I.** $\frac{3}{4}$ **II.** $\frac{1}{48}$
b. Los sucesos P y R no son independientes porque $P(R/P) = \frac{3}{4}$ y $P(R) = \frac{1}{2}$.

18. $\frac{3}{5}$

19. 0,089

Capítulo 4

p | **89**

1. **a.** La variable aleatoria X es continua y su recorrido es $R(X) = \mathbb{R}^+$.
b. La variable aleatoria Y es discreta y su recorrido es $R(Y) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
c. La variable aleatoria Z es discreta y su recorrido es R (Z) = {3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10;...; 18}.
d. La variable aleatoria W es continua y su recorrido es $R(W) = \mathbb{R}^+$.
e. La variable aleatoria T es discreta y su recorrido es R (T) = {0; 1; 2; 3; 4; 5}

p | **90**

2. **a.** P (T = 3) = 0,2 **b.** P (T = 1) = 0,35 , P (T = 2) = 0,45 y P (T = 3)= 0,2.

3. **a.** $P(N = 3) = \frac{9}{20}$
b. $P(N = 1) = \frac{3}{10}$, $P(N = 2) = \frac{1}{20}$,
$P(N = 3) = \frac{9}{20}$ y $P(N = 4) = \frac{1}{5}$.

p | **91**

4. **a.** $R(S) = \mathbb{N}$
b. I. $P(S = 4) = \frac{125}{1296}$ **II.** $P(S = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$
III. $P(S = 7) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6}$
c. $P(S = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

5. **a.** $P(X = 1) = \frac{3}{10}$ **c.** $P(X = 3) = \frac{1}{6}$
b. $P(X = 2) = \frac{1}{2}$

6.

r	10	15	25	34
$h_x(r)$	0,5	0,1	0,2	0,2

p | **92**

7. **a.** La función $f_x(r)$ es la función de densidad de una variable aleatoria X, porque $f_x(r) \geq 0$ para cualquier valor de **r** y, además, el área bajo el gráfico de $f_x(r)$ y por sobre R (X) es 1.

b. La función f_x (r) no es la función de densidad de una variable aleatoria X, pues el área bajo el gráfico de f_x (r) y por sobre R (X) no es 1.

8. **a.** $P(X < 6) = \frac{1}{9}$ **d.** $P(X < 3) = 0$

b. $P(5 < X < 9) = \frac{2}{3}$ **e.** $P(X \geq 10) = 0$

c. $P(X > 1) = 1$

p | **93**

9. **a.** $a = \frac{1}{50}$

b. $F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{t^2}{100} & \text{si} \quad 0 \leq 1 \leq 10 \\ 1 & \text{si} \quad t > 10 \end{cases}$

c. $P(X > 7) = 0{,}51$ y $P(1 < X < 9) = 0{,}8$.

10. **a.** $a = \frac{2}{17}$ **b.** $P(0{,}5 < X < 5) = \frac{35}{68}$

p | **94**

11. **a.** $P(5 < X < 8) = \frac{3}{5}$ **c.** $P(X > 7) = \frac{2}{5}$

b. $P(X < 6) = \frac{2}{5}$

d. $F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 4 \\ \frac{1}{5}(t - 4) & \text{si} \quad 4 \leq t \leq 9 \\ 1 & \text{si} \quad t > 9 \end{cases}$

12. $\mu = 1{,}92$ y $v = 0{,}6136$.

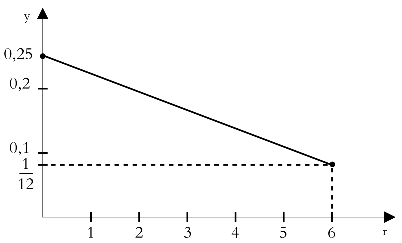
13. **a.** $f_x(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{si} \quad r > \frac{1}{3} \end{cases}$

b. $\mu = \frac{1}{6}$ y $\sigma = \sqrt{\frac{1}{108}}$.

p | **96**

14. **a.** $m = \frac{1}{36}$ **b.** $\mu = 2{,}5$ y $v = 90{,}11$.

c.



d. **I.** $P(X < 3) = \frac{5}{8}$ **II.** $P(3 < X < 5) = \frac{5}{18}$

p | **97**

15. **a.** 0,1797 **b.** 0,1256 **c.** 0,5631

16. **a.I.** Dom $f_x = \mathbb{R}$

II. La recta y = 0 es asíntota horizontal. No existe asíntota vertical ni oblicua.

III. La función f_x (r) es creciente en ($-\infty$; 175) y decreciente en (175 ; $+\infty$), tiene un máximo relativo en r = 175 y no posee mínimos relativos.

IV. La función es cóncava hacia arriba en ($-\infty$; 160) U (190 ; $+\infty$) y cóncava hacia abajo en (160 ; 190). Los puntos de inflexión son (160 ; 0,016) y (190 ; 0,016).

b. Observando el gráfico de f_x (r) de la página 97 del Libro se puede ver que todos los resultados obtenidos en el ítem **a.** se verifican en dicho gráfico.

p | **99**

17. **a.** 0,0548 **b.** 0,9918 **c.** 0

18. **a.** 73,24% **b.** 0% **c.** 50%

p | **100**

19. **a.** 114 **b.** 4411 **c.** 70

20. En la categoría A no hay docentes, en la B hay 168 y en la C hay 32.

p | **102**

21. **a.** $\sigma = 2{,}344$ **b.** 19,77%

22. 2211

23. La calificación sobresaliente se otorgó a partir de la nota 6,78.

Guía de ejercitación

1. **a.** R(X) = {2; 4; 5; 6; 8},
R(Y) = { 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10} y
R(Z) = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

b.

r	2	4	5	6	8
P (X = r)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

r	1	2	3	4	5
P (Y = r)	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

r	6	7	8	9	10
P (Y = r)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

r	0	1	2	3	4
P (Z = r)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

r	5	6	7	8	9
P (Z = r)	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

c.I. $P(1 < X < 5) = \frac{11}{15}$ **II.** $P(Y > 10) = 0$

III. $P(Z \geq 0) = 1$ **IV.** $P(1 \leq X \leq 6) = \frac{4}{5}$

V. $P(6 < Y < 8) = \frac{1}{15}$ **VI.** $P(2 < Z < 10) = \frac{2}{3}$

2. **a.** a = 0,1 , b = 0,2 y c = 0,3.

b. $P(X \geq 12) = 0{,}8$, $P(X > 12) = 0$ y $P(X < 8) = 0$.

3. **a.** La función h_x (r) definida en la tabla es la función de probabilidad de X, pues $h_x(r) \geq 0$ para cualquier valor de X y, además, la suma de las imágenes es 1.

p | **104**

b. La función definida en la tabla no es la función de probabilidad de X, porque al sumar las imágenes el resultado no es 1, sino 0,99.

c. La función definida en la tabla no es la función de probabilidad de X, pues la suma de las imágenes es 0,9861 y no 1.

4. **a.** La variable aleatoria X es discreta.

b. R(X) = {0; 1; 2, 3; 4}

c.

r	0	1	2	3	4
hx (r)	0,1022	0,36326	0,3814	0,1387	0,014

d. 0,1527

5. **a.I.** 0,9245 **II.** 0,000125

p | **105**

b. $\mu = 142{,}5$ y $v = 7{,}125$.

6. **a.** 0,2281 **b.** 0,7374 **c.** $1{,}379 \cdot 10^{-7}$

7. **a.** La función f_x (r) no es la función de densidad de una variable aleatoria X.

b. La función f_x (r) no es la función de densidad de una variable aleatoria X.

c. La función f_x (r) es la función de densidad de una variable aleatoria X.

d. La función f_x (r) es la función de densidad de una variable aleatoria X.

p | **106**

8. **a.** $b = -12$

b. $F_x(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ t - \frac{1}{6} & \text{si} \quad \frac{1}{3} < t < 1 \\ \frac{41}{6} + 6t^2 - 12t & \text{si} \quad 1 \leq t \leq \frac{7}{6} \end{cases}$

c. $P(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ $P(\frac{1}{9} < X \leq \frac{10}{9}) = \frac{8}{9}$

$P(X > \frac{1}{4}) = \frac{29}{32}$

9. **a.I.** 12,96% **II.** 73,86% **III.** 42,07%

b.I. 2592 **II.** 14772 **III.** 8414

10. **a.** 0,9332 **b.** 0,0062