longseller

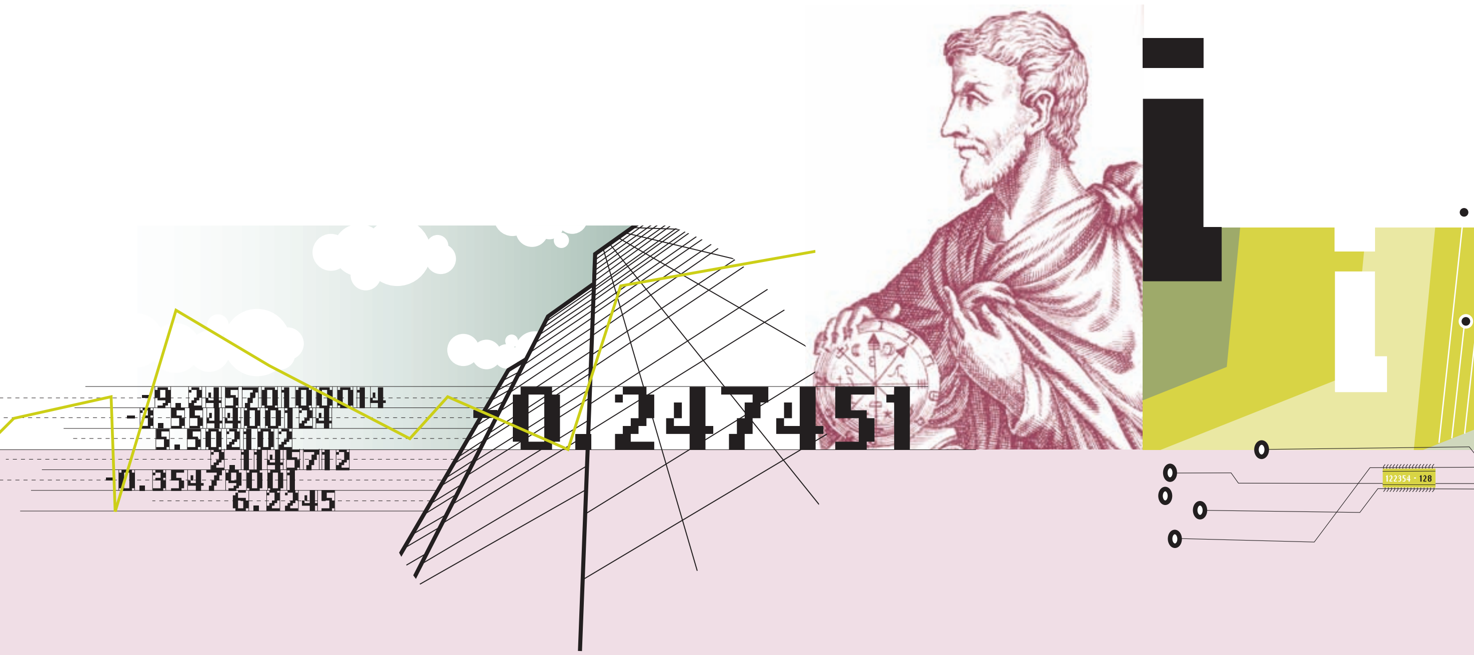
Matemática | Polimodal

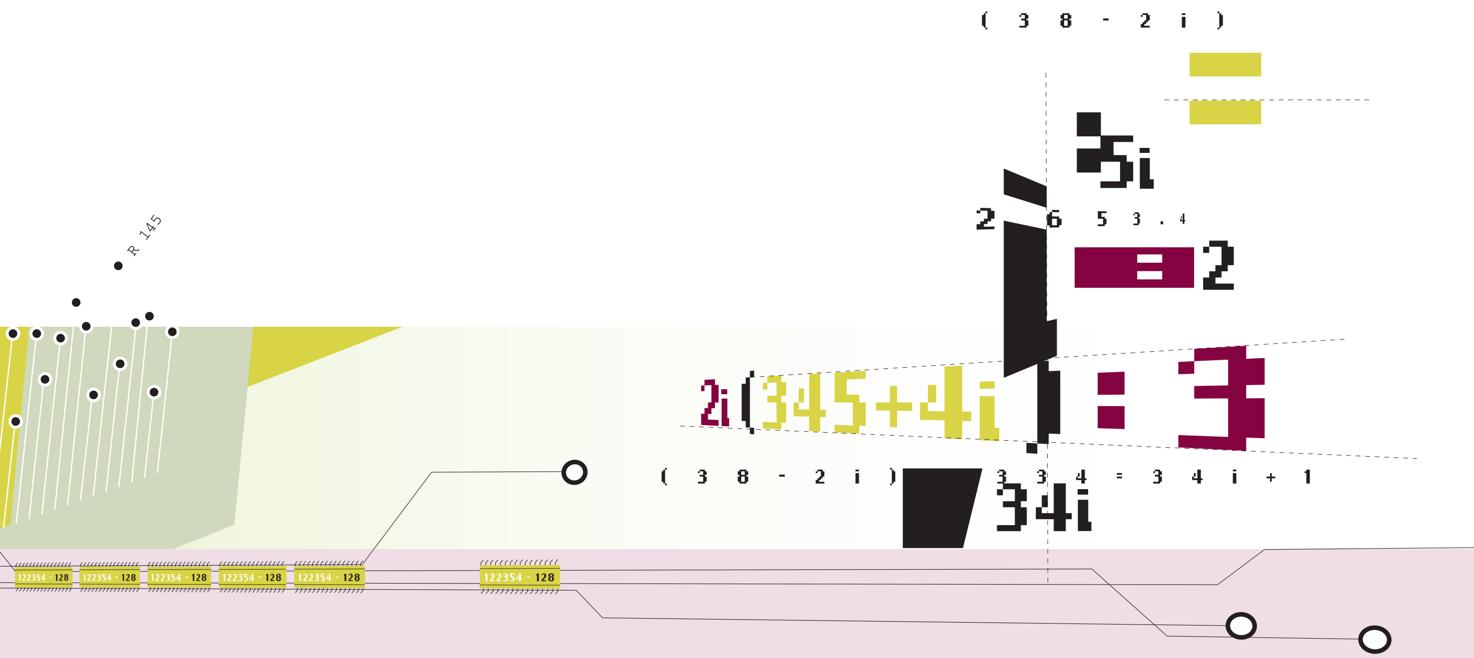
3

Números y sucesiones

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

Índice



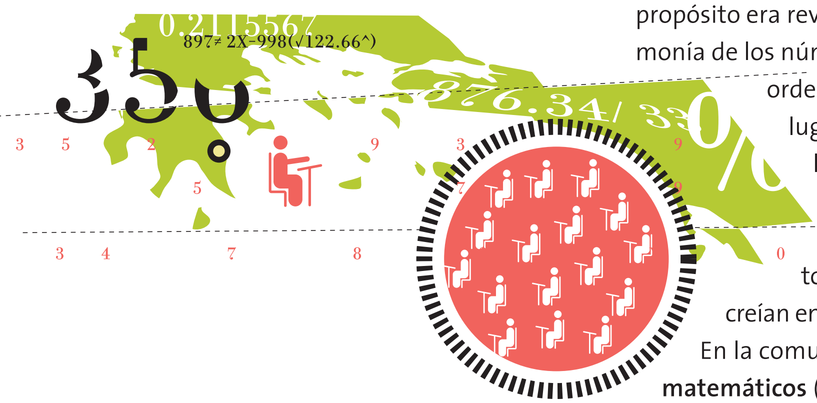


(3 8 - 2 i)
R 145
2i (345+4i
(3 8 - 2 i)
34i

1 Números reales

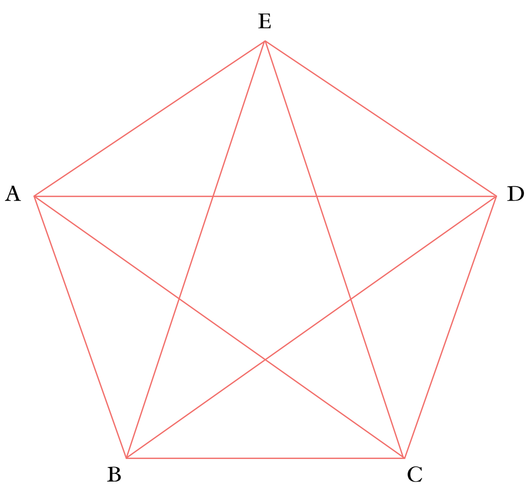
Antiguamente, se creía que todos los números eran naturales o fraccionarios. Sin embargo, había segmentos, como la diagonal de un cuadrado de lado 1, cuya longitud no era ningún número conocido, y así nacieron los números irracionales. En este capítulo, estudiaremos las características de dichos números.

Tengan en cuenta las opiniones de todos los integrantes del grupo.
Analicen detenidamente cada propuesta antes de descartarla.

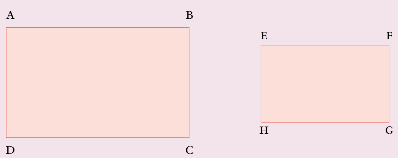


Para comenzar...

Con Pitágoras, en el siglo VI antes de Cristo, nació la matemática tal como la concebimos hoy, como una ciencia deductiva.
Sin embargo, Pitágoras no veía a la matemática como una ciencia, sino como una escala para ascender a los orígenes del universo.
Los pitagóricos conformaban una comunidad religiosa cuyo propósito era revelar la armonía del mundo expresada en la armonía de los números. Para ellos, el universo era un cosmos ordenado, y el destino del hombre era descubrir el lugar que le estaba asignado para mantener, así, la armonía de acuerdo con el orden natural.
Aconsejaban la obediencia y el silencio, la abstinencia de consumir ciertos alimentos, la sencillez en el vestir y en las posesiones; creían en la inmortalidad y en la trasmigración del alma.
En la comunidad, había dos clases de miembros: los **matemáticos** (a los que Pitágoras comunicaba los conocimientos científicos) y los **acusmáticos** (que participaban de los conocimientos, principios morales, ritos y prescripciones de la hermandad).
Para los pitagóricos, el mundo podía ser expresado a través de la armonía de los números, y consideraban que éstos sólo podían ser enteros o razones (divisiones) entre enteros: las fracciones.
Los pitagóricos eran ante todo geómetras, motivo por el cual se esforzaban por comparar longitudes con líneas y encontrar cuáles eran las proporciones que hacían las imágenes más armoniosas a la vista.
La estrella pentagonal (formada por las diagonales de un pentágono regular) era el símbolo de los seguidores de Pitágoras y en ella buscaban cierta regularidad numérica.



Algo más...
Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus ángulos congruentes y sus lados proporcionales.



En particular, dos rectángulos ABCD y EFGH son semejantes si existe una constante $k \in \mathbb{R}$, llamada razón de semejanza, tal que:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH} = k$$

En su intento por encontrarla, observaron que había un número que se repetía en muchas ocasiones. Observemos qué encontraron.

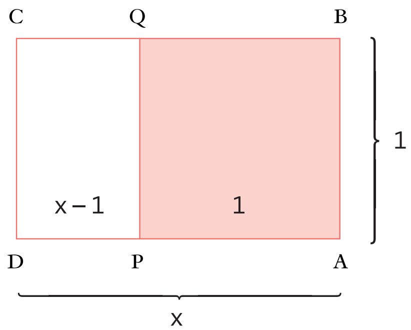
Problema 1

Un rectángulo ABCD se llama **rectángulo áureo** si al quitarle el máximo cuadrado que cabe en su interior, el rectángulo resultante es semejante al primero.

a. Si ABCD es un rectángulo áureo y $\overline{AB} = 1$ cm, ¿cuál es la longitud del lado BC?
b. Encuentren la razón de semejanza entre un rectángulo áureo cualquiera y el obtenido al quitarle el cuadrado.

Problema 1

a. Tomemos un rectángulo áureo como el que se pide y llamemos **x** al lado AD.



El máximo cuadrado que puede quitarse de él es el ABQP, de 1 cm de lado. Los rectángulos ABCD y PQCD son semejantes; luego, los lados correspondientes son proporcionales. $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ no pueden ser correspondientes porque, en ese caso, la constante de proporcionalidad entre ellos sería 1 y los rectángulos serían iguales (lo cual no es cierto); luego, $\overline{PQ}$ se corresponde con $\overline{AD}$, y $\overline{PD}$, con $\overline{DC}$.

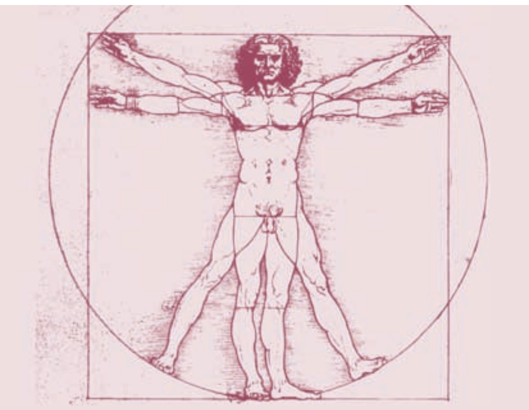
Pitágoras

¿Sabían que ...?
Se cree que Pitágoras era hijo de Mnesarco y que nació alrededor del año 569 a. C. en la isla de Samos, una colonia jónica de Grecia, en las costas del mar Egeo.
Alrededor del 532 a. C., dejó Samos, debido a las persecuciones del tirano Polícrates, y se dirigió a Crotona, un puerto al sudeste de Italia.
Desde allí, realizó viajes a Egipto, Babilonia, la India y China; en estos dos últimos lugares recibió la influencia de Buda y Lao-tsé. Pese a que Pitágoras es conocido por su famoso teorema, hay indicios de que éste ya era usado en las regiones que visitó y de que los babilonios lo conocían desde 1000 años atrás.
Fundó una comunidad religiosa con reglas claras, como no mirarse al espejo, no recoger lo caído y no comer alubias ni carne. En la comunidad, todo era compartido; hasta los descubrimientos matemáticos eran comunes a todos y atribuidos a Pitágoras, incluso después de su muerte.
Sus discípulos estudiaron música, astronomía, geometría y los números. Notaron que los sonidos más armónicos eran los producidos por cuerdas cuyas longitudes eran proporcionales. A partir de ello, el lema de esta escuela era "Todo es armonía y número".
Pitágoras murió en Metapontum, a los 80 años, y su escuela persistió por varios siglos más.

¿Sabían que ...?
Los pitagóricos encontraron rectángulos áureos en el arte, en la naturaleza, en la vida cotidiana, y demás. Observemos algunos ejemplos:
En el cuadro *El sacramento de la última cena*, del pintor Salvador Dalí, se notan rectángulos áureos en el sacramento y la posición de los apóstoles. También, si se unen los centros de las caras del dodecaedro que sirve de bóveda, se obtiene una sección áurea.

El sacramento de la última cena

En el cuerpo humano, hallamos el número de oro en la relación que hay entre la altura y la distancia desde el ombligo a los pies.
Leonardo da Vinci ya conocía este número, como muestra su famoso dibujo *La divina proporción*.



La divina proporción

Entonces:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{DC}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$$

$$1 = x\,(x-1) \Rightarrow 1 = x^2 - x$$

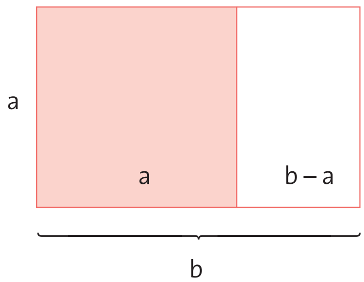
O sea: $x^2 - x - 1 = 0$

Luego, como $x > 0$, con la fórmula resolvente obtenemos:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

que es la medida en centímetros del lado $\overline{BC}$.

b. Consideremos, ahora, un rectángulo áureo cualquiera. En él se cumple que $\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b}$, siendo **a** y **b** números reales positivos y $a < b$.



Por lo tanto:
$(b-a)\,b = a^2 \Rightarrow b^2 - ab = a^2 \Rightarrow$ (si dividimos por $a^2 \neq 0$)

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{\cancel{a}b}{a^{\cancel{2}}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0 \Rightarrow \text{(como } \frac{b}{a} > 0\text{)}\ \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

O sea, la razón de semejanza (constante de proporcionalidad entre los lados) es el número

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Este número es también la razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular, símbolo de los pitagóricos, y por eso es que lo llamaron **número de oro**.

El número de oro

Se llama **número de oro** a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se lo designa con la letra griega ϕ (fi) en honor del escultor griego Fidos, que lo tuvo presente en sus obras.

Durante años, los matemáticos griegos se dedicaron a buscar una fracción que represente exactamente a $\sqrt{5}$, pero no llegaron a hallarla.
Sabían que el número que representara a $\sqrt{5}$ debía estar comprendido entre 2 y 3, dado que $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$; luego, su parte entera sería 2.
Veamos cómo pudieron obtener una aproximación:
$2{,}1^2 = 4{,}41$
$2{,}2^2 = 4{,}48$
$2{,}3^2 = 5{,}29 > 5$

Con lo cual, las primeras cifras de $\sqrt{5}$ deben ser 2,2.
Para ver como sigue, hacemos:
$2{,}21^2 = 4{,}8841$
$2{,}22^2 = 4{,}9284$
$2{,}23^2 = 4{,}9284$
$2{,}24^2 = 5{,}0176 > 5$

Sabemos ahora que $\sqrt{5} \approx 2{,}23$, y podemos acercarnos más:
$2{,}231^2 = 4{,}977361$
$2{,}232^2 = 4{,}981924$
....
$2{,}236^2 = 4{,}999696$
$2{,}237^2 = 5{,}004169 > 5$

1. Encuentren tres cifras decimales de cada uno de los siguientes números:

a. $\sqrt{17}$

____

____

b. $\sqrt[3]{25}$

____

____

c. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

____

____

2. Decidan si las afirmaciones expresadas por las siguientes inecuaciones son verdaderas o falsas y justifiquen sus respuestas.

a. $1 < \sqrt[3]{5} < 3$

____

____

b. $225 < \sqrt{51077} < 226$

____

____

c. $233 < \sqrt[3]{12812900} < 234$

____

____

3. Demuestren que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

4. Encuentren una aproximación de $\sqrt{2}$ con tres cifras decimales.

5. ¿Es posible escribir el número $\sqrt{\frac{9}{16}}$ como razón entre dos números enteros? ¿Por qué?

6. ¿Es posible escribir el número $\sqrt{\frac{1}{2}}$ como razón entre dos números enteros? ¿Por qué?

Luego, tenemos una nueva aproximación de $\sqrt{5}$, que es 2,236. Podríamos seguir así, pero no tenemos certeza de que alguna vez dé exacto o periódico. Es decir, no sabemos si $\sqrt{5}$ puede escribirse como una fracción.

Lo mismo les ocurrió a los matemáticos griegos hasta que, finalmente, uno de ellos, llamado Euclides, demostró que esto es imposible (la historia cuenta que Pitágoras ya lo sabía pero que, como esto contradecía toda su teoría, lo ocultó).

Demostremos que $\sqrt{5}$ no puede escribirse como una fracción.

Supongamos que $\sqrt{5}$ es un número racional (que puede escribirse como fracción), entonces existen a y b $\in \mathbb{Z}$ $(b \neq 0)$ tales que $\frac{a}{b} = \sqrt{5}$, siendo $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible (no se puede simplificar más). Por lo tanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 5b^2$ (1)

Luego, como 5 es un número primo y a^2 es múltiplo de 5 (dado que se puede escribir como producto de 5 por otro número entero) $\Rightarrow$ **a** debe ser múltiplo de 5 $\Rightarrow a = 5 \,.\, t,\ t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

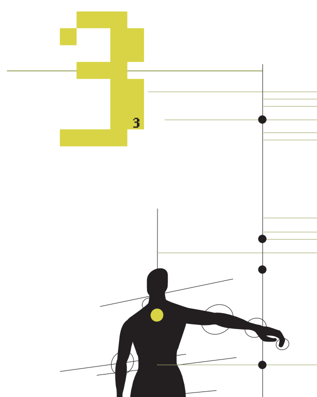
$\Rightarrow a^2 = (5t)^2 = 25\,t^2$ (2)

De (1) y (2): $5\,b^2 = 25\,t^2 \Rightarrow b^2 = 5\,t^2 \Rightarrow b^2$ es múltiplo de 5 $\Rightarrow$ **b** es múltiplo de 5.

O sea que **a** y **b** son múltiplos de 5; por lo tanto, la fracción $\frac{a}{b}$ puede simplificarse dividiendo numerador y denominador por 5 $\Rightarrow$ no es una fracción irreducible. Pero habíamos tomado una fracción que era irreducible, o sea, llegamos a algo absurdo.

Para llegar a esto, habíamos partido de suponer que $\sqrt{5}$ era un número racional.

Luego, $\sqrt{5}$ no puede escribirse como una razón (división) entre dos números enteros, y se lo llama **número irracional**.



Números irracionales.
Ubicación en la recta numérica.

Un **número** es **irracional** cuando no puede escribirse como división de dos números enteros (o sea, como fracción).

Casi todas las raíces cuadradas son irracionales. Sólo algunos números enteros tienen raíz cuadrada entera (son los llamados **cuadrados perfectos**: 1, 4, 9, 16, etcétera), y algunas fracciones irreducibles cuyo numerador y denominador son cuadrados perfectos tienen raíz cuadrada fraccionaria.
Son irracionales las raíces de números enteros que no den un número entero, como $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{29}$, etcétera.
También son irracionales todos los números que se obtienen al operar (sumar, restar, multiplicar o dividir) números irracionales con números racionales, como el número de oro.
Otro número irracional conocido es el número π, que es la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia.

Conclusión
Los números irracionales no pueden escribirse como fracción; por lo tanto, no tienen un número finito de cifras decimales ni un período que se repita; o sea, los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Como ya dijimos, los pitagóricos eran, ante todo, geómetras y se esforzaban por medir todas las líneas. En ese intento, se encontraron con números que no eran racionales y se les ocurrió pensar si existirían longitudes con esas medidas. Ya sabían ubicar los números racionales en la recta numérica. Veamos lo que hicieron entonces:

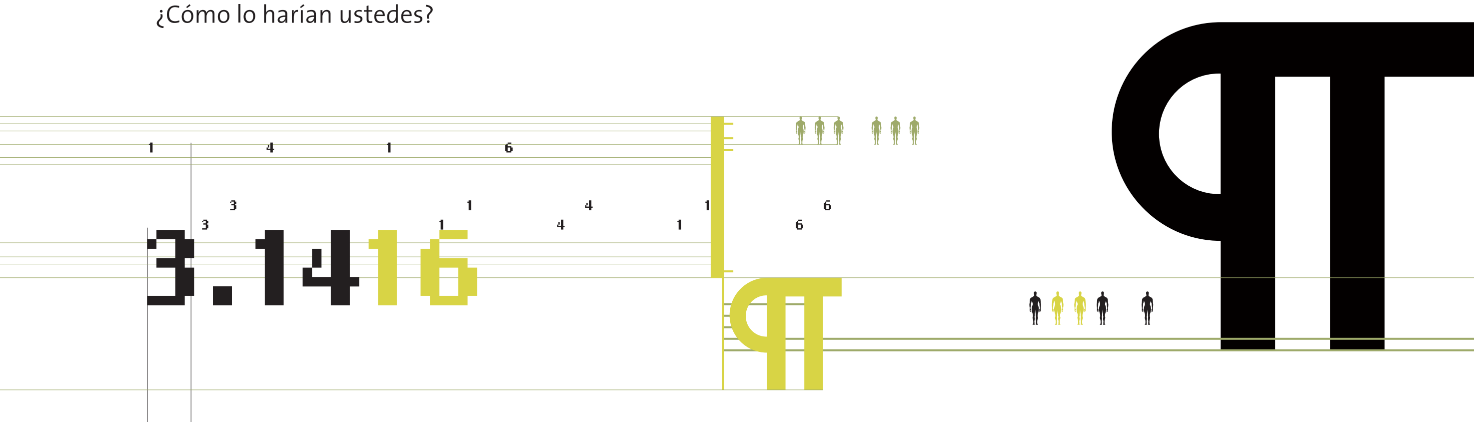
Problema 2

Los pitagóricos querían construir con regla y compás segmentos de distintas medidas, tales como:

a. $\sqrt{5}$ **b.** $1 + \sqrt{5}$ **c.** $5 + 3\sqrt{5}$ **d.** el número de oro

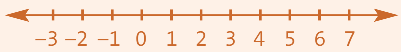
¿Cómo lo harían ustedes?

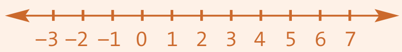
¿Sabían que...?
El primero en utilizar el número π fue William Jones en 1706; sin embargo, quien realmente popularizó su uso fue Leonard Euler en 1748. A pesar de saber que π es un número irracional, por lo cual tiene infinitas cifras decimales, muchos matemáticos se dedicaron a buscarlas. Uno de ellos fue Srinivasa Ramanujan. Para lograrlo, ideó muchas fórmulas que sirvieron después, con ayuda de las computadoras, para encontrar más de 2 billones de cifras de π. Ramanujan era hijo de un contable y de la hija de un oficial del juzgado de Erode (la India). Su abuelo materno pidió a la diosa Namagiri que bendijera a su hija con descendencia y el 22 de diciembre de 1887 nació Srinivasa. Desde muy chico, se divertía entreteniendo a sus amigos con fórmulas y teoremas y repitiendo valores de π y de $\sqrt{2}$. Cuando aprendió a leer, pudo demostrar sus fórmulas, pero cada demostración era un auténtico trabajo de investigación, dado que no tenía una educación formal. Fue un verdadero autodidacto y solía decir que la diosa Namakkal le inspiraba las fórmulas en sueños. De hecho, al levantarse de la cama escribía resultados que luego comprobaba. Este proceso lo repitió toda su vida y les envió cartas comunicando sus hallazgos a los matemáticos famosos, hasta que fue reconocido por Hardy y logró así trabajar en Cambridge, a pesar de no haber estudiado nunca en una universidad. Volvió a la India en 1919, donde murió al año siguiente con un *status* de científico y una reputación de la que ningún otro hindú había disfrutado jamás.

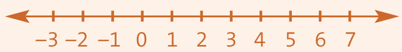


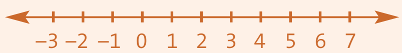
7. Marquen en la recta numérica los siguientes números:

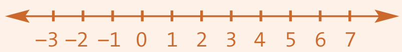
$-\sqrt{7}$, $1+\sqrt{7}$, $\sqrt{7}-1$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{48}$











8. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen sus respuestas:

a. Si **a** es un número irracional y **b**, racional, entonces:

I. a + b es racional

____

II. a . b es irracional

____

b. Si **a** y **b** son números irracionales, entonces:

I. a + b es racional

____

II. a . b es irracional

____

Problema 3

Marquen en la recta numérica todos los números que verifican las siguientes condiciones:

a. son mayores que 1 y menores que 5;

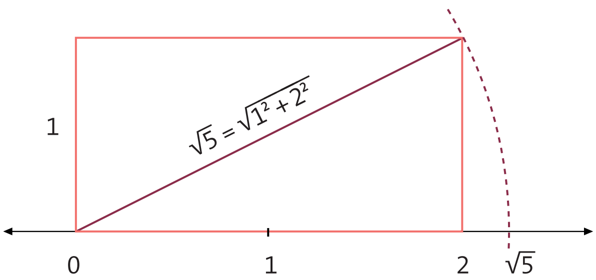
b. son menores o iguales a $-\sqrt{2}$;

c. tienen módulo menor o igual a $\frac{3}{8}$.

Problema 2

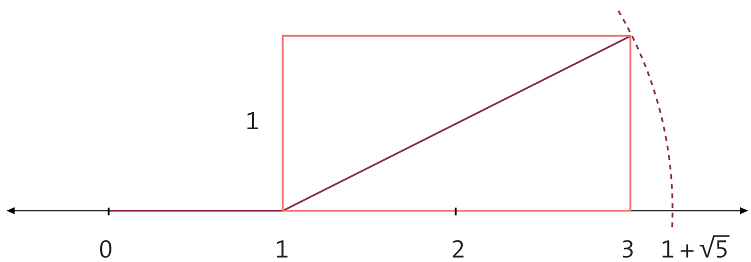
a. Construyamos sobre la recta numérica, a partir de 0, un rectángulo de 2 unidades de largo por 1 unidad de alto y marquemos su diagonal.

Luego tracemos una circunferencia con centro en 0 y que tenga como radio a la diagonal del rectángulo, que sabemos, por el Teorema de Pitágoras, que mide $\sqrt{5}$. El punto en el que esta circunferencia corte a la recta numérica será la ubicación de $\sqrt{5}$.



El segmento cuyos extremos son 0 y $\sqrt{5}$ es el segmento buscado.

b. Para construir un segmento de longitud $1+\sqrt{5}$, marquemos primero un segmento de longitud 1; luego, a partir de él, repitamos el procedimiento anterior.

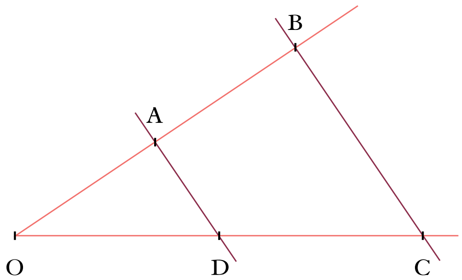


El segmento cuyos extremos son 0 y $1+\sqrt{5}$ es el buscado.

c. Para construir un segmento de longitud $5 + 3\sqrt{5}$, partimos de uno de longitud 5 y, repitiendo el procedimiento anterior, trazamos un segmento de longitud $5 + \sqrt{5}$. A partir de éste, repitiendo nuevamente el procedimiento, marcamos segmentos de longitudes $5 + 2\sqrt{5}$ y $5 + 3\sqrt{5}$, respectivamente.

d. Para lograr un segmento que mida el número de oro, debemos dividir el segmento que dibujamos en el punto **b.** en dos partes iguales. Para ello, procedemos de la siguiente manera:

- Tomamos, a partir del 0, un segmento de longitud $1 + \sqrt{5}$, al que llamamos $\overline{OC}$.
- Trazamos en cualquier dirección, que no sea la de $\overline{OC}$, una semirrecta de origen O y en ella marcamos dos segmentos de igual longitud, $\overline{OA}$ y $\overline{AB}$.
- Trazamos la recta que pasa por B y por C.
- Trazamos la recta paralela a la anterior que pasa por A.



Por el Teorema de Thales (dado que las rectas BC y AD son paralelas), tenemos que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{DC}}, \text{ pero } \overline{OA} = \overline{AB}; \text{ luego, } \overline{OD} = \overline{DC}.$$

Luego, el segmento OC queda dividido en dos partes iguales, cada una de las cuales mide la mitad del mismo.
Como $\overline{OC} = 1 + \sqrt{5}$

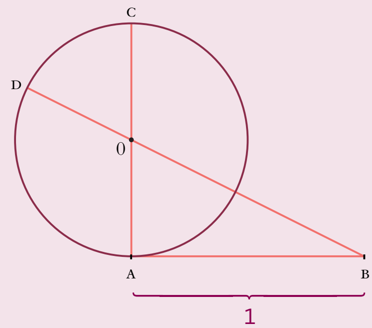
$$\overline{OD} = \overline{DC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

La medida de $\overline{OD}$ y $\overline{DC}$ es el número de oro.

Algo más...

En la recta numérica, podemos representar cualquier número, si logramos trazar un segmento cuya longitud mida ese número. Por este motivo, los matemáticos griegos se esforzaban por encontrar un segmento que midiera exactamente el número de oro.
Finalmente, Euclides logró encontrarlo.
Veamos cómo realizó su construcción:

- Trazó primero un segmento AB de longitud 1.
- Luego trazó un segmento AC, perpendicular a $\overline{AB}$, de longitud 1.
- Llamó O al punto medio de $\overline{AC}$.
- Trazó la circunferencia con centro O y radio $\overline{OC}$.
- Trazó la semirrecta BO, y llamó D al punto de intersección de ésta con la circunferencia, más alejado de B.



Calculemos la medida de $\overline{BD}$. Para ello:

$$\overline{BO} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Entonces, $\overline{BD}$ mide el número de oro.

¿Cómo se lee...?
$\mathbb{Q}$ = conjunto de números racionales
$\mathbb{I}$ = conjunto de números irracionales
$\mathbb{R}$ = conjunto de números reales

9. Encuentren un número irracional que esté entre $\sqrt{2}$ y 2.

10. ¿Cuántos números irracionales hay entre $\sqrt{2}$ y 2? ¿Por qué?

11. Consideren el conjunto de todos los números **x** que verifican $2 < x \leq \sqrt{8}$.

a. ¿Cuántos números naturales hay en este conjunto? ¿Por qué?

b. Encuentren, si los hay, números racionales en este conjunto. ¿Cuántos hay? ¿Por qué?

c. Encuentren, si los hay, números irracionales en este conjunto. ¿Cuántos hay? ¿Por qué?

d. ¿Cuántos números reales hay en este conjunto? ¿Por qué?

Al conjunto de los números irracionales lo llamamos $\mathbb{I}$.
Con los números irracionales, logramos completar toda la recta numérica.

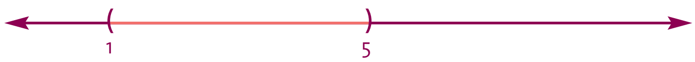
Conjunto de los números reales

Llamamos **conjunto de números reales** ($\mathbb{R}$) al conjunto de los números racionales y los irracionales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Observemos que tanto los números racionales como los números irracionales son números reales, y que un número o es racional o es irracional, es decir:
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \phi$

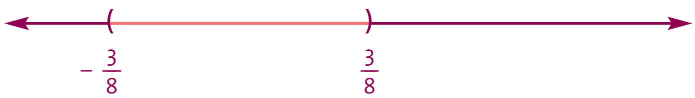
Problema 3

a. Para marcar los números **x** que son mayores que 1 y menores que 5, realizamos:



Para indicar que el 1 y el 5 no pertenecen al segmento, ponemos paréntesis en los extremos. En otras palabras, estamos marcando todos los números reales **x** que verifican $1 < x < 5$. A este conjunto se lo llama **intervalo** en la recta y se escribe (1; 5).
b. Necesitamos marcar los valores **x** que verifican $x \leq -\sqrt{2}$, o sea, que pertenecen al intervalo $(-\infty; -\sqrt{2}\,]$ (indicamos con un corchete que ese extremo está incluido).

c. Si $|x| < \frac{3}{8}$ entonces la distancia de **x** al 0 debe ser menor que $\frac{3}{8}$; luego, $-\frac{3}{8} < x < \frac{3}{8}$, o sea, $x \in \left(-\frac{3}{8}; \frac{3}{8}\right)$



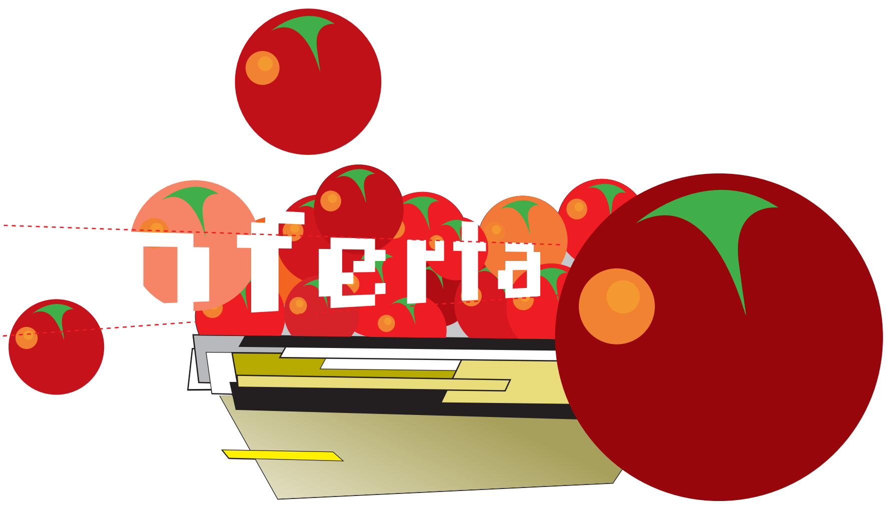
Intervalos en la recta real

$[a; b] = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leq x \leq b\}$	$(-\infty, b] = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } x \leq b\}$
$(a; b] = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a < x \leq b\}$	$(-\infty, b) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } x < b\}$
$[a; b) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leq x < b\}$	$[a, +\infty) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } x \geq a\}$
$(a; b) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a < x < b\}$	$(a, +\infty) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } x > a\}$

Problema 4

En la verdulería de don Manuel, están de oferta los tomates, a $0,79 el kilo. Don Manuel no tiene monedas de 1 centavo ni de 5 centavos, pero quiere ser justo con sus clientes. ¿Cuánto le cobrará a una persona que:

a. lleva 2 kg de tomates y le paga con un billete de $2;
b. lleva 6 kg de tomates y le paga con un billete de $5;
c. lleva 5 kg de tomates y le paga con un billete de $5?



Problema 5

La impresora Buen Trabajo está de oferta a $99,90. Claudio compra una con un billete de $100, el vendedor no le da el vuelto y él se va. Después va a la verdulería, compra papas por $0,90, paga con $1 y reclama el vuelto. ¿Por qué lo reclamó en el segundo caso y no en el primero?

12. Escriban como intervalos y representen en la recta numérica los siguientes conjuntos:

a. $\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } -1 \leq x < 2\}$

b. Todos los números **x** que superan en 3 unidades al doble de 4.

c. Todos los números reales **x** cuyo cuadrado es menor que 1.

13. Representen en la recta numérica los siguientes intervalos:

a. $[-\sqrt{3}, 5)$

b. $(-3, +\infty)$

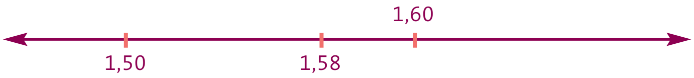
c. $\left[-4, \frac{1}{2}\right]$

d. $(-\infty, 8]$

¿Sabían que...?
George Cantor fue el primero en introducir la noción de intervalo, con la notación de paréntesis y corchetes para sus extremos y la notación de llaves para indicar conjuntos numéricos.
Cantor fue un matemático nacido en San Petersburgo (Rusia). En 1856, se trasladó con su familia a Alemania. La disciplina en la familia era muy estricta y tenían una verdadera obsesión por el éxito. Cantor estudió Matemática, y obtuvo el puesto de profesor en la Universidad de Halle, en 1872. Siempre quiso que lo convocaran de una de las universidades importantes (Berlín o Gotinga), pero no lo logró debido a la oposición de Kronecker, con quien estaba enfrentado porque sus trabajos refutaban los fundamentos de los trabajos que Kronecker realizaba.
Cantor demostró que no todos los conjuntos con infinitos elementos son del mismo tamaño, y que conjuntos que todos diríamos que tienen más elementos, en realidad tienen los mismos. Por ejemplo, hay la misma cantidad de números pares que de naturales, hay igual cantidad de números enteros que de naturales, hay igual cantidad de números racionales que de naturales. Sin embargo, hay más números reales que naturales. Sus teorías fueron muy controvertidas en su época y tuvo enfrentamientos con otros matemáticos. Por tal motivo, padeció trastornos maníaco-depresivos y sólo al final de sus días se empezó a apreciar su trabajo, cuando ya era demasiado tarde, pues su enfermedad mental estaba muy avanzada. Murió en 1918 en un sanatorio para enfermos mentales.

Problema 4

a. Como cada kilogramo de tomates cuesta \$0,79, los 2 kg costarán \$1,58, pero como don Manuel no tiene vuelto de 1 ni de 5 centavos, tiene dos opciones: cobrarle \$1,50 o \$1,60. ¿Cuál de las opciones es la más cercana al valor real? Si observamos la recta numérica



notamos que la diferencia con el precio real es menor para \$1,60. Analicemos el error cometido.
Error cometido al tomar 1,60: 1,60 – 1,58 = 0,02
Error cometido al tomar 1,50: 1,58 – 1,50 = 0,08
Don Manuel le cobrará entonces \$1,60.
b. Si alguien lleva 6 kg, el precio real será de \$4,74; luego, puede cobrarle \$4,70 o \$4,80. Veamos el error cometido en cada caso:

4,80 – 4,74 = 0,06 4,74 – 4,70 = 0,04

El error es menor si le cobra \$4,70.

c. Si el cliente lleva 5 kg, el precio real será de \$3,95, y las opciones de cobro, \$3,90 o \$4; observemos, entonces, los errores cometidos:

4 – 3,95 = 0,05 3,95 – 3,90 = 0,05

Analizando las diferencias en este caso, notamos que el error cometido es el mismo, entonces don Manuel podrá cobrar \$4 o \$3,90.
Aunque en el caso de este comerciante es igualmente justo cualquiera de los dos valores, por convención se toma 4 como aproximación de 3,95.

Redondeo y truncamiento

Para aproximar un número decimal $a_0, a_1a_2a_3...a_na_na_{n+1}...$ por **redondeo** a **n** cifras decimales, observamos la cifra a_{n+1}:

- si $a_{n+1} < 5$, dejamos el número $a_0, a_1a_2a_3...a_n$
- si $a_{n+1} \geq 5$, aumentamos una unidad en la cifra a_n.

Muchas veces en lugar de aproximar el número por redondeo, lo que hacemos es no considerar las cifras restantes.

Truncar un número en determinada cifra significa eliminar todas las cifras que siguen a partir de ella, reemplazándolas por cero.

Por ejemplo:
Si truncamos el número 2,371492 a cuatro cifras decimales, obtenemos el número 2,3714; en cambio, si lo redondeamos, debemos tomar el número 2,3715.

Problema 5

Tanto en la compra de la impresora como en la de las papas, debían darle a Claudio un vuelto de \$0,10. Es decir que el error que comete cada vendedor al cobrarle es el mismo. Sin embargo, no representa lo mismo tomar 0,10 de 100 que de 1. Veamos qué porcentaje representa en cada caso:

El porcentaje de aumento al cobrar 100 en lugar de 99,90 es:

$$\frac{0{,}10}{99{,}90} \cdot 100 = 0{,}1001\%$$

El porcentaje de aumento al cobrar 1 en lugar de 0,90 es:

$$\frac{0{,}10}{0{,}90} \cdot 100 = 11{,}11\%$$

Por lo tanto, porcentualmente, el error cometido en el segundo caso es mucho mayor que en el primero.

Algo más...
Cuando hacemos cuentas con la calculadora, debemos interpretar qué nos indican los resultados.
Por ejemplo, si efectuamos 2:3, en algunas calculadoras obtenemos 0.666666666; en otras, en cambio, obtenemos 0.666666667.
¿Cómo interpretamos las diferentes respuestas?

Las calculadoras que dan el primero de los resultados están programadas para truncar el número; luego, como el resultado es periódico y el visor sólo puede mostrar 10 cifras, desprecian las cifras posteriores.

Las que dan el segundo, están programadas para redondear el número y, como la cifra del lugar 11 es también un 6, aumentan en uno la cifra ubicada en el décimo lugar.

14. Escriban dos números decimales distintos que al redondearlos a dos cifras den:
a. 2,97 **b.** –9,24

15. Escriban dos números decimales distintos que al truncarlos a dos cifras den:
a. 2,97 **b.** –9,24

16. ¿Entre qué valores puede estar un número que al redondearlo da 4,25? ¿Y si se hubiese truncado? ¿Cuál es el mayor error que se puede cometer en cada caso?

17. ¿Entre qué valores puede estar un número que al redondearlo da –8,7453? ¿Y si se hubiese truncado? ¿Cuál es el mayor error que se puede cometer en cada caso?

18. Encuentren cuál es el error absoluto y cuál el porcentual al calcular $\frac{1}{17} - \frac{1}{6}$, tomando una aproximación por redondeo de cada fracción a dos cifras decimales.

Error absoluto, error relativo y error porcentual

Se llama **error absoluto** a la distancia entre el valor real y el valor aproximado de un número:
Si V_r = valor real del número y V_a = valor aproximado; entonces, el **error absoluto** es: $e_a = |V_r - V_a|$.

Se llama **error relativo** al cociente entre el error absoluto y el valor aproximado: $e_r = \frac{e_a}{V_a}$.

Se llama **error porcentual** al porcentaje que representa dicho error: $e_p = \frac{e_a}{V_a} \cdot 100$.

Supongamos que queremos aproximar un número a dos cifras decimales, ¿cuál es la diferencia entre truncar o redondear? Llamemos V_r al valor real del número, V_a al valor aproximado por redondeo y V_t al valor aproximado por truncamiento. Si queremos aproximarlo a dos cifras decimales por redondeo, analizamos si la tercera cifra decimal es mayor o menor que 5.
Sea $V_r = a_0, a_1a_2a_3...$, entonces, para redondear debemos considerar a_3.
Si $a_3 < 5 \Rightarrow V_a = a_0, a_1a_2 \Rightarrow e_a = |V_r - V_a| = 0{,}00a_3a_4... \Rightarrow e_a < 0{,}005$

Si $a_3 \geq 5$, al número exacto le agregamos los milésimos necesarios para obtener un décimo más. Este número que se agrega es, como máximo, 5 milésimos, entonces: $e_a < 0{,}005$.
Luego, para cualquier valor de a_3: $e_a < 0{,}005$.
$V_t = a_0, a_1a_2$, entonces, el error cometido al truncar es
$e_a = |V_r - V_t| \Rightarrow 0{,}00a_3... < 0{,}01$.
Esto ocurre en cualquier cifra decimal.

Conclusión
Si se aproxima por redondeo a cualquier cifra, se comete siempre un error menor que al truncar.

Las páginas 25 a la 111
no disponibles

Matemática | Polimodal

Números y sucesiones

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

Serie Libros Temáticos de Matemática

Libro 1
Funciones 1

Libro 2
Funciones 2

Libro 3
Números y sucesiones

Libro 4
Vectores

Libro 5
Análisis 1

Libro 6
Análisis 2

Libro 7
Matrices

Libro 8
Probabilidad y estadística

Código interno: 1923
ISBN 987-550-040-2
9 789875 500402

longseller