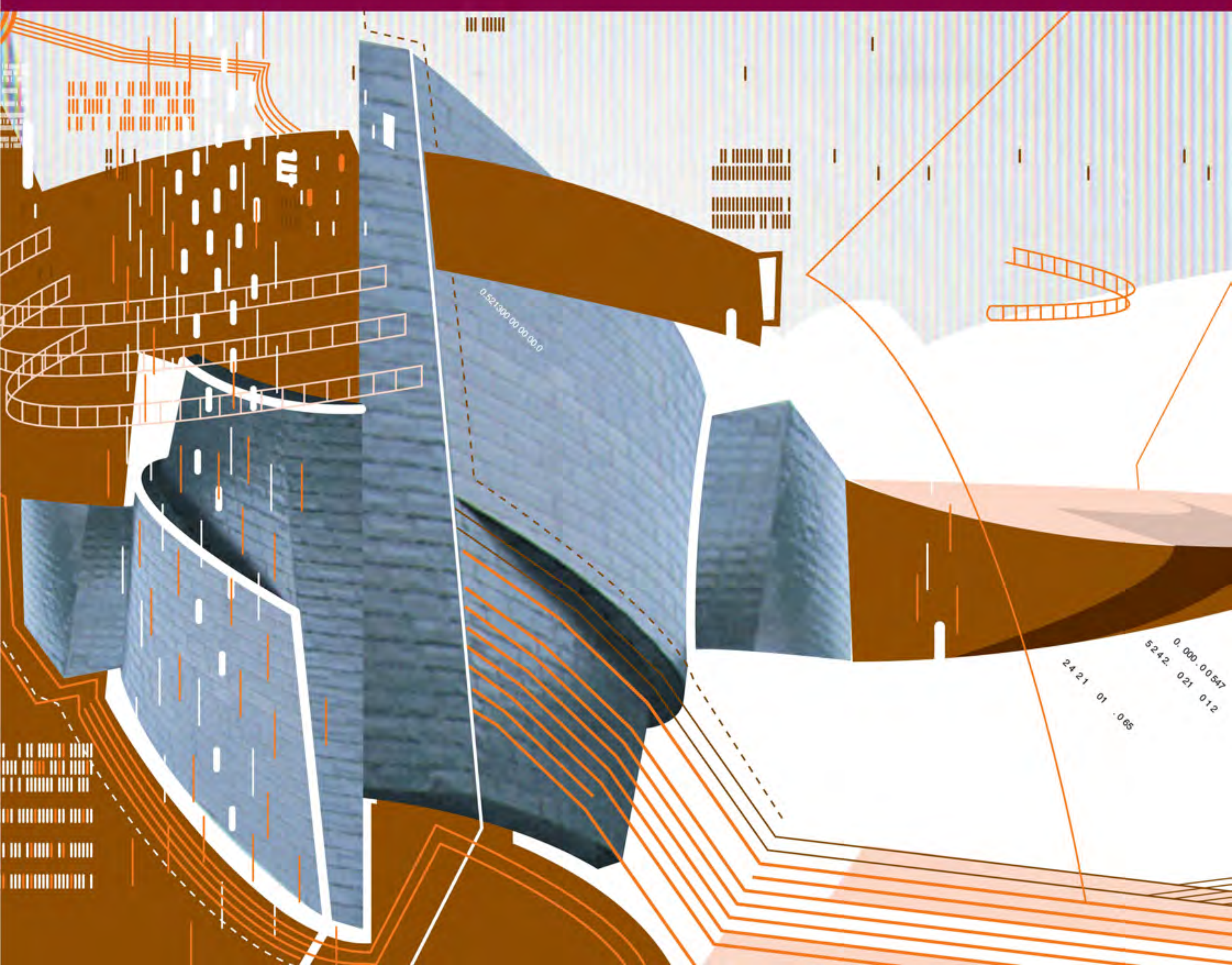
longseller | EDUCACIÓN

Matemática

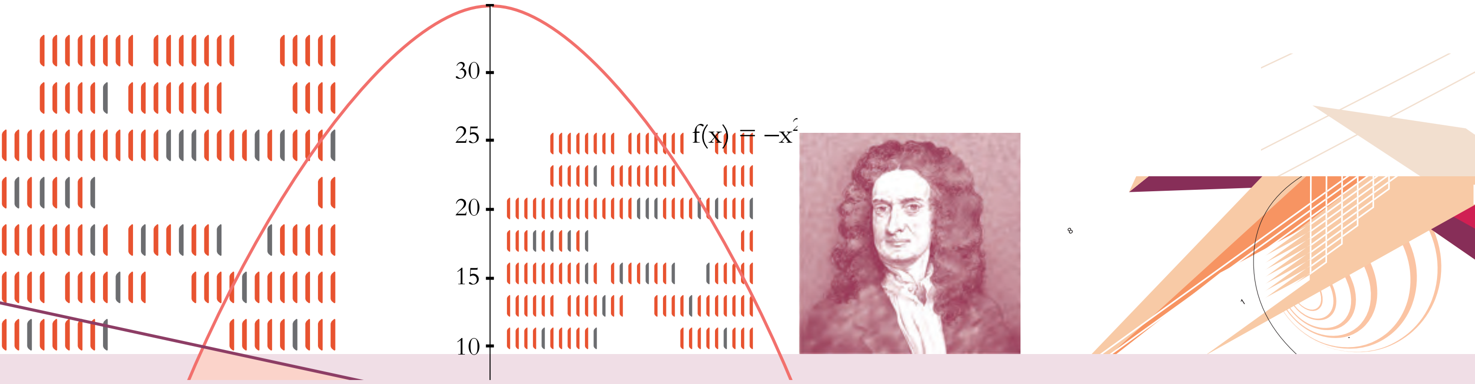
6

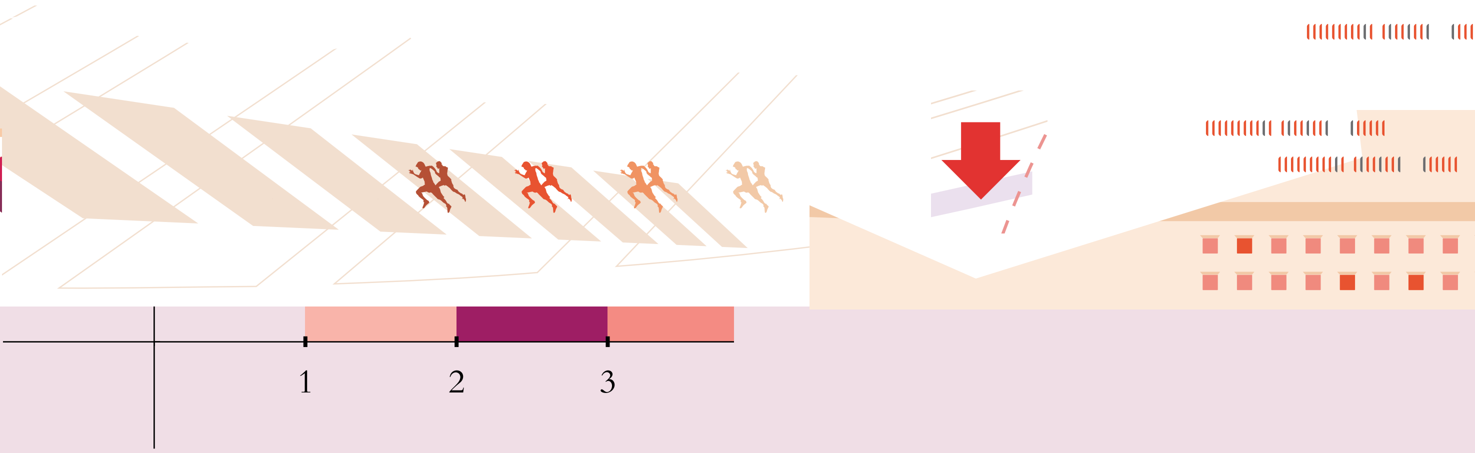
Análisis 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok



Índice




1
2
3

1 Derivadas

El concepto de derivada resulta muy útil en diferentes ciencias, como la economía y la física, entre otras, pues permite estudiar la forma y la rapidez con que se producen los cambios.

Muchas veces resulta práctico conocer ciertas reglas que facilitan la resolución de los problemas matemáticos. Siempre recordaremos y aplicaremos mejor aquellas que hemos construido nosotros mismos.

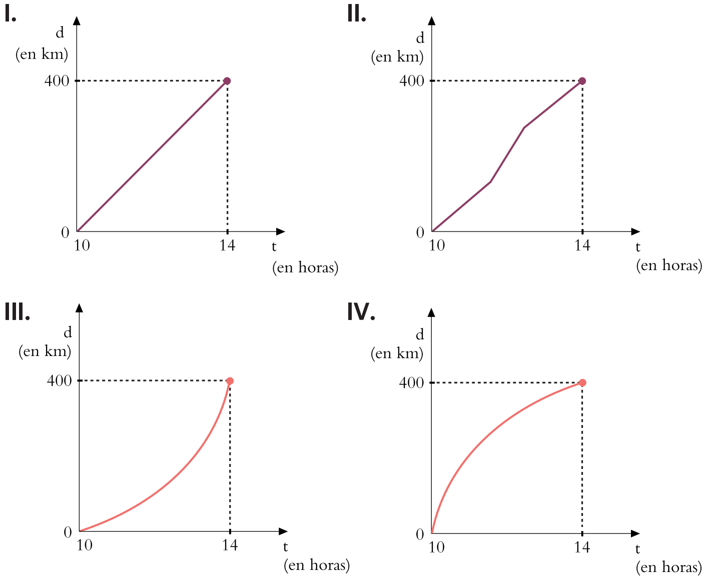
¿Sabían que...?
El concepto de **derivada** fue desarrollado en el siglo XVII simultáneamente por dos matemáticos: Isaac Newton y Gottfried Leibniz, que trabajaron sobre los conceptos del cálculo. Esto generó una gran disputa entre ellos, pues cada uno suponía que el otro había plagiado el concepto de derivada.

Isaac Newton

Gottfried Leibniz

Problema 1

Pablo visita a sus abuelos con frecuencia. Siempre parte de su casa a las 10 de la mañana y llega a la casa de sus abuelos, que está a 400 kilómetros de la suya, a las 14 horas.
Los siguientes gráficos representan la distancia a la que se encuentra Pablo de su casa (d), en función del tiempo (t), en distintas oportunidades en que fue a visitar a sus abuelos.



a. ¿Cuál fue la velocidad promedio en cada caso?
b. Para cada gráfico: ¿Qué pueden decir acerca de la velocidad con la que viajó Pablo? ¿Fue siempre a la misma velocidad?

Problema 2

Una camioneta parte de un pueblo y se desplaza con trayectoria recta según la función $d(t) = 35t + \frac{1}{4}t^2$, donde **t** es el tiempo de marcha medido en horas y **d** es la distancia de la camioneta al pueblo de donde partió, medida en kilómetros.

A 144 km del pueblo hay un cruce de caminos muy peligroso. Por este motivo, se instaló allí un dispositivo que controla que la velocidad de los vehículos no supere los 40 km/h. Si se excede este límite, el dispositivo saca una foto de la patente del vehículo y registra la infracción.
¿Le corresponde una multa a la camioneta? ¿Por qué?

Problema 1

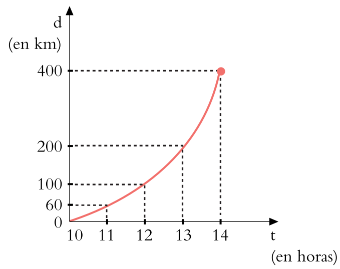
a. Como en todos los casos Pablo viajó 400 kilómetros en 4 horas, entonces, en todo el viaje su velocidad promedio fue de $\frac{400}{4}$ km/h, o sea, de 100 km/h. A la velocidad promedio se la llama **velocidad media**.

Velocidad media

Si la función d(t) determina la distancia de un móvil a un cierto lugar en función del tiempo **t**, llamamos **velocidad media** del móvil en el intervalo de tiempo **a; b** al cociente entre d(b) – d(a) y b – a. Simbólicamente escribimos:

$$Vm_{a;\,b} = \frac{d(b) - d(a)}{b - a}$$

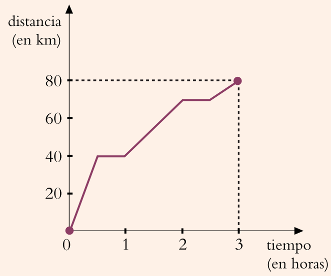
b. En el gráfico **I.** la función que relaciona la distancia a la que se encuentra Pablo de su casa con el tiempo está representada por una recta. Entonces, para intervalos de tiempo iguales, Pablo recorrió distancias iguales. Por lo tanto, Pablo viajó siempre a la misma velocidad.
El gráfico **II.** presenta segmentos de recta. Para cada uno de ellos, podemos hacer un análisis similar al realizado para el gráfico **I.** Por lo tanto, Pablo viajó a diferentes velocidades en los tres tramos, siendo la velocidad constante en cada uno de ellos.
Como el gráfico **III.** no corresponde a una función lineal, consideremos en él la distancia recorrida por Pablo en cada intervalo de una hora.



En el gráfico anterior, podemos observar que en cada intervalo de una hora Pablo recorrió diferentes distancias. Por lo tanto, la velocidad a la que viajó no se mantuvo constante. Lo mismo sucede para el gráfico **IV.**

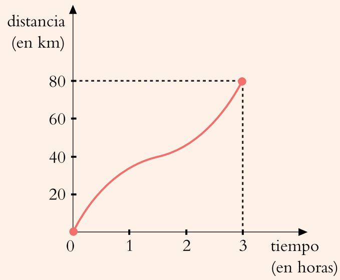
1. Daniel suele ir a la casa de unos amigos que viven a 80 kilómetros de la suya. Los siguientes gráficos representan la distancia a la que se encuentra Daniel de su casa, en función del tiempo, en distintas ocasiones en que visitó a sus amigos.
Para cada gráfico, analicen si Daniel realizó el viaje a velocidad constante. Justifiquen sus respuestas.

a.



____

b.



____

2. Calculen la velocidad media de todo el viaje para cada uno de los gráficos de la actividad 1.

____

____

____

____

____

____

3. Un automóvil hizo un viaje en cuatro etapas. En la primera, recorrió 100 km en una hora y media. En la segunda etapa, 150 km en 2 horas. En la tercera, recorrió 200 km en 1 hora 40 minutos, y en la cuarta etapa, hizo 70 km en tres cuartos de hora.
¿Cuál fue su velocidad media durante todo el viaje? ¿Y durante los primeros dos tramos?

____

____

____

____

4. Consideren la función $d(t) = 2t^2 + 14t$, que relaciona la distancia en kilómetros a un cierto lugar de un móvil (d) con el tiempo de marcha (t) medido en horas, y hallen las siguientes velocidades medias:

a. $Vm_{1;\,2} =$ ______________________

b. $Vm_{1;\,1{,}5} =$ ______________________

c. $Vm_{1;\,1{,}3} =$ ______________________

d. $Vm_{1;\,1{,}2} =$ ______________________

e. $Vm_{1;\,1{,}15} =$ ______________________

f. $Vm_{1;\,b} =$ ______________ (con $b > 1$)

Problema 2

Para responder a la pregunta, necesitamos conocer la velocidad de la camioneta en el instante en que pasó por el lugar donde está el dispositivo. Para ello, primero debemos calcular en qué momento la camioneta se encontraba a 144 km del pueblo desde el que partió. Es decir, tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$144 = 35t + \frac{1}{4}t^2$, o sea, $0 = \frac{1}{4}t^2 + 35t - 144$

Al aplicar la fórmula resolvente, obtenemos que $t = 4$ o $t = -144$. Pero como **t** debe ser positivo, solamente consideramos $t = 4$. Luego, para determinar cuál era la velocidad de la camioneta a las 4 horas de viaje, debemos hallar qué marcaba el velocímetro de la camioneta en ese momento. Para ello, calculamos las velocidades medias en intervalos de tiempo que incluyan a 4 y que sean cada vez más pequeños. Por ejemplo, resulta que

$$Vm_{4;\,5} = \frac{181{,}25 - 144}{5 - 4} = 37{,}25,\quad Vm_{4;\,4{,}5} = \frac{162{,}5625 - 144}{4{,}5 - 4} = 37{,}125,$$

$$Vm_{4;\,4{,}1} = \frac{147{,}7025 - 144}{4{,}1 - 4} = 37{,}025.$$ Luego, en el intervalo de

tiempo **4; b**, con $b > 4$, la velocidad media es

$$Vm_{4;\,b} = \frac{d(b) - d(4)}{b - 4} = \frac{35b + \frac{1}{4}b^2 - 144}{b - 4}$$

Como queremos determinar la velocidad sólo en 4, hallamos el límite de la velocidad media entre 4 y **b** cuando **b** tiende a 4 por derecha.

$$\lim_{b \to 4^+} \frac{35b + \frac{1}{4}b^2 - 144}{b - 4} = \lim_{b \to 4^+} \frac{\frac{1}{4}\cancel{(b-4)}(b + 144)}{\cancel{b-4}} = 37$$

Si hubiésemos calculado la velocidad medida en el intervalo de tiempo **4; b**, con $b < 4$, resultaría que

$$Vm_{4;\,b} = \frac{d(4) - d(b)}{4 - b} = \frac{-[-d(4) + d(b)]}{-(-4 + b)} = \frac{d(b) - d(4)}{b - 4}$$ y, entonces,

obtendríamos el mismo valor que en el caso de $b > 4$.

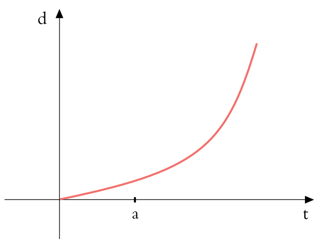
Por lo tanto, cuando la camioneta estaba a 144 kilómetros del pueblo, a las 4 horas de salir, su velocidad era de 37 km/h. Entonces, no le corresponde una multa, pues no superó los 40 km/h. La velocidad de 37 km/h es la **velocidad instantánea** de la camioneta en $t = 4$.

Velocidad instantánea

Llamamos **velocidad instantánea en el momento a** y lo denotamos **Vi(a)** al valor del límite de la velocidad media en el intervalo de tiempo **a; b** cuando **b** tiende a **a**. Simbólicamente escribimos $\mathbf{Vi(a) = \lim_{b \to a} \frac{d(b) - d(a)}{b - a}}$.

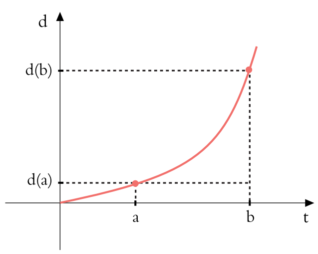
Problema 3

El siguiente gráfico representa la distancia (d) de un auto, que transita por una ruta recta, a la ciudad desde donde salió, en función del tiempo (t).
Hallen la velocidad instantánea del auto en el momento **a**.



Problema 3

En este problema, debemos utilizar un razonamiento similar al empleado en el problema 2. La diferencia con ese problema es que en el problema 3 no conocemos la fórmula de la función que vincula la distancia a la ciudad al tiempo, sino el gráfico de esa función.
Sabemos que la velocidad media en un intervalo de tiempo es el cociente entre la variación entre las distancias al punto de partida y la variación del tiempo empleado. Pero ¿cómo interpretamos ese cociente en el gráfico anterior?
Consideremos en dicho gráfico un intervalo de tiempo **a; b** cualquiera.



Entonces, la velocidad media del auto en el intervalo de tiempo **a; b** es $Vm_{a;\,b} = \frac{d(b) - d(a)}{b - a}$.

5. La distancia al suelo de un proyectil que fue lanzado verticalmente está dada por la función $a(t) = -5t^2 + 100t$, donde **t** es el tiempo medido en segundos y **a** es la altura que alcanza el proyectil, medida en metros.
Calculen la velocidad del proyectil cuando está por primera vez a 375 metros de altura.

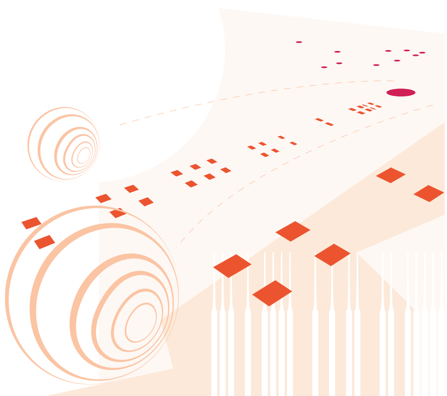
6. A partir de la función $d(t) = -t^2 + 20t$, que vincula la distancia en kilómetros de un móvil a un punto determinado (d) al tiempo de marcha (t) expresado en horas, obtengan las siguientes velocidades:

a. $Vm_{1;\,3}$ = ____________

b. Vi (1) = ____________

c. Vi (3) = ____________

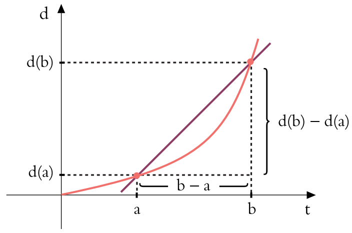
d. Vi (1,5) = ____________



¿Sabían que...?
Gottfried Leibniz nació el 1 de julio de 1646, en Leipzig, Alemania.
Su padre, que era profesor de Filosofía, falleció cuando él tenía seis años y fue criado por su madre.
A los catorce años, ingresó en la Universidad de Leipzig. Aunque en nuestra época esto nos resulte muy extraño, en aquel momento no era el único alumno de esa edad que asistía a la universidad.
En la Universidad de Leipzig, estudió Filosofía y Matemática, y se graduó en leyes. Como en esta casa de estudios le fue negada la posibilidad de doctorarse en Derecho, lo hizo en la Universidad de Altdorf, en 1667.
Leibniz se interesó también en estudiar otros campos de las ciencias y, en 1671, publicó un libro de física.
En 1672, viajó a París. Allí profundizó sus estudios de Matemática y física y desarrolló el cálculo diferencial e integral.
Newton le escribió una carta en la cual le comentaba algunos de sus resultados, pero no le describía sus métodos. A partir de aquí, Leibniz tomó conciencia de que debía publicar sus descubrimientos. En octubre de 1676, Newton le escribió una segunda carta en la cual, con diplomacia, daba a entender que suponía que Leibniz le había copiado sus conceptos.
En 1736, Newton publicó su libro y fue entonces cuando empezó la disputa entre ellos sobre quién había sido el creador de los nuevos conceptos del cálculo.

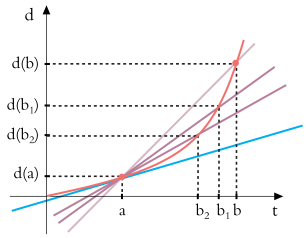
¿Cómo se lee...?
f'(a): f "prima" en **a** o derivada de f(x) en **a**.

Si en el último gráfico trazamos la recta determinada por los puntos (a; d(a)) y (b; d(b)), obtenemos el siguiente gráfico:



Por lo tanto, la expresión $\dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (a; d(a)) y (b; d(b)).[1]

Luego, para hallar la velocidad instantánea en **a**, debemos calcular el valor del límite de $\dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$ cuando **b** tiende a **a**. Para ello, dibujemos las distintas rectas que pasan por (a; f(a)) y que quedan determinadas para diferentes valores de **b** a medida que **b** se aproxima cada vez más a **a**.



En el límite, obtenemos una recta que pasa por el punto (a; d(a)) y cuya pendiente es el valor del límite de $\dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$ cuando **b** tiende a **a**. Esta recta recibe el nombre de **recta tangente** al gráfico de la función en el punto (a; d(a)).

La pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto (a; d(a)) se llama **derivada de la función en el valor a**.

Derivada de una función en un valor

Llamamos **derivada de la función f(x) en el valor a** y lo denotamos **f'(a)** al valor de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Es decir que $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, siempre que este límite sea un número real.

[1] Ver Libro 1, página 41.

Si consideramos $x - a = h$, obtenemos que $x = a + h$, con lo cual cuando **x** tiende a **a**, entonces, **h** tiende a 0. Luego, resulta que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \mathbf{(1)} \Rightarrow \mathbf{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad \mathbf{(2)}$$

La expresión $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ se llama **cociente incremental**.

Para calcular la derivada de una función en un valor es, a veces, más práctico usar la expresión **(2)** que la **(1)**.

Recta tangente al gráfico de una función en un punto

Llamamos **recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (a; f(a))** a la recta que pasa por ese punto y cuya pendiente es $f'(a)$.

Problema 4

Encuentren la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^2 + 3x$ en $a = 7$, o sea, en el punto de abscisa 7.

Problema 4

Para hallar la ecuación de una recta, necesitamos, por ejemplo, la pendiente de dicha recta y uno de sus puntos.

Si $a = 7$, entonces, $f(a) = f(7) = 7^2 + 3 . 7 = 70$. Luego, la recta que buscamos pasa por el punto (7; 70).

Como la pendiente de la recta tangente es la derivada de f(x) en $a = 7$, debemos obtener el valor del límite del cociente incremental cuando **h** tiende a cero, con lo cual en primer lugar tenemos que hallar f(a+h), o sea, f(7+h). Para ello, reemplazamos en f(x) a **x** por $7 + h$.

Como $f(x) = x^2+3x \Rightarrow f(7+h) = (7+h)^2 + 3(7+h)$. Luego, resulta

que $$f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{f(7 + h) - f(7)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(7 + h)^2 + 3(7 + h)] - 70}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{49 + 14h + h^2 + 21 + 3h - 70}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{17h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(17 + h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0}(17 + h) = 17$$

Entonces, la pendiente de la recta tangente es 17.

¿Sabían que...?

Isaac Newton nació el 4 de enero de 1643 en Inglaterra. Su padre, que era granjero, falleció unos meses antes de su nacimiento.

En 1661, Newton ingresó en el Trinity College de Cambridge. Se interesó por la Matemática cuando al intentar leer un libro de astronomía no entendió los conceptos matemáticos que incluía.

En 1665, se cerró la Universidad de Cambridge durante una epidemia.

Éste fue el período en el que Newton desarrolló sus avances en Matemática, óptica, física y astronomía.

Cuando en 1667 se reabrió la universidad, Newton obtuvo su primer cargo. Trabajó allí hasta 1696, cuando se mudó a Londres. En esta ciudad tuvo diferentes cargos; por ejemplo, el de presidente de la Royal Society, para el cual fue reelegido desde 1699 hasta su muerte.

En 1671, escribió *De Methodis Serierum et Fluxionum*, donde desarrolló el concepto de fluxión (derivada), que se publicó en 1736.

Falleció en Londres en 1727.

Recordemos que...

- $(a+b)^2 = (a + b) . (a + b)$

Si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, obtenemos lo siguiente:

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$

Luego, sumamos y resulta que

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

7. Calculen la derivada de estas funciones en el valor de **a** indicado.

a. $f(x) = 3x + 2$ en $a = 2$

b. $g(x) = 2x^3$ en $a = 1$

c. $h(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$

8. Escriban la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = 4x^2 + 3$ en $a = 5$.

9. Completen las siguientes afirmaciones para que resulten verdaderas. Justifiquen sus respuestas.

a. Si la recta tangente al gráfico de $g(x) = x^2 + 3x + 2$ en el punto $(a; g(a))$ es paralela al eje **y**, entonces, es $a =$ ______

b. Si la recta tangente al gráfico de $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en el punto $(a; h(a))$, con $a < 0$, es perpendicular a la recta $y = 9x + 3$, entonces, es $a =$ ______

Por lo tanto, debemos encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 17 y pasa por el punto (7; 70). Recordemos que la ecuación de una recta con pendiente **m** y ordenada al origen **b** es $y = mx + b$. Luego, si $y = mx + b \Rightarrow 70 = 17 \cdot 7 + b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = -49$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es $y = 17x - 49$.

Función derivable en un valor

Una función **f(x) es derivable en un valor a** si $f'(a)$ es un número real.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es derivable en $a = 3$, pues

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = 6,$$ con lo cual $f'(3)$ es un número real.

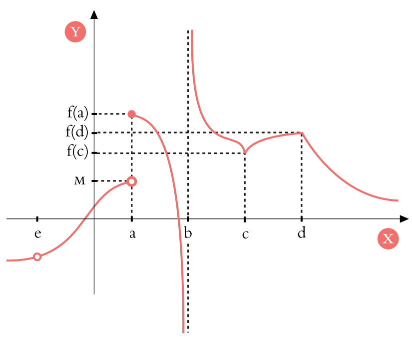
En cambio, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $a = 0$, porque

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h},$$ y como

$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$ y $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$, entonces, $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe y, en consecuencia, $f'(0)$ no existe.

Problema 5

El siguiente gráfico corresponde a la función f(x). A partir de él, determinen si existe la derivada de f(x) en los valores **a**, **b**, **c**, **d** y **e**.



Problema 5

Para hallar f'(a), debemos obtener el valor del límite del cociente incremental (página 17) cuando **h** tiende a cero. Pero en el gráfico observamos que en **a** la función es discontinua. Por lo tanto, debemos considerar los límites laterales del cociente incremental.

Luego, resulta que $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{M-f(a)}{h}$.

Como el numerador del cociente incremental tiende a M – f(a), que es un número distinto de 0, y el denominador tiende a 0, entonces, obtenemos lo siguiente:

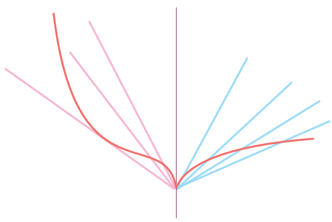
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$$

Por lo tanto, independientemente del resultado del otro límite lateral, podemos afirmar que f'(a) no es un número real, con lo cual f'(a) no existe. Esto ocurre en cualquier discontinuidad de primera especie con salto finito.

Analicemos qué sucede para el valor **b**.

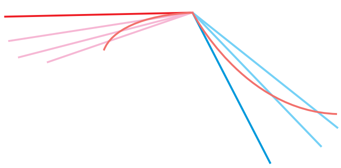
Como la recta x = b es asíntota vertical de f(x), entonces, **b** no pertenece al dominio de f(x). Luego, f(b) no existe. Por lo tanto, no es posible calcular la derivada de f(x) en **b**; es decir que f'(b) no existe.

Para determinar si existe la derivada de f(x) en **c**, tracemos por (c; f(c)) las rectas que se aproximan a la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c; f(c)):



Observamos que tanto las rectas de color rosa como las de color celeste se aproximan cada vez más a una recta vertical. Ésta es la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c; f(c)). Pero como las rectas verticales no tienen pendiente, entonces, f'(c) no existe.

Analicemos qué sucede para el valor **d** haciendo un razonamiento similar al realizado para el valor **c**, es decir, tracemos por (d; f(d)) el mismo tipo de rectas que dibujamos para determinar la existencia de f'(c)



Recordemos que...

Una función f(x) es continua en **a** si se cumplen las siguientes condiciones:

I. Existe f(a)

II. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, donde $L \in \mathbb{R}$

III. L = f(a)

Las discontinuidades se clasifican de la siguiente manera:

- Evitable si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tiene distinto valor que f(a).
- Esencial de primera especie con salto finito si los límites laterales $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ tienen valores distintos.
- Esencial de primera especie con salto infinito si por lo menos uno de los límites laterales, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ o ambos, es infinito.
- Esencial de segunda especie si no existe alguno de los límites laterales, o sea, si no existe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ o no existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

10. Analicen si cada una de las siguientes funciones es derivable en el valor de **a** que se indica. Justifiquen sus respuestas.

a. $f(x) = x^3 + 2$ en a = 1

b. $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en a = –1

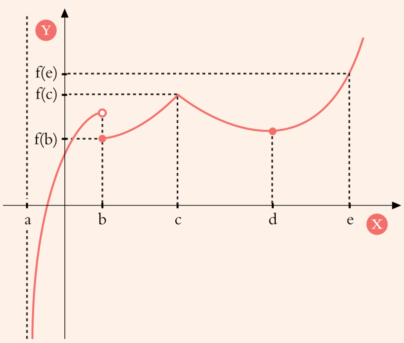
11. Determinen si las funciones que figuran a continuación son derivables en el valor de **a** indicado. Justifiquen sus respuestas.

a. $f(x) = |x|$ en $a = -2$

b. $f(x) = |x + 2|$ en $a = 5$

c. $f(x) = |x + 2|$ en $a = -3$

12. Observen el siguiente gráfico, correspondiente a f(x), y analicen si existe la derivada de f(x) en los valores **a**, **b**, **c**, **d** y **e**.



Al trazar las rectas que pasan por el punto (d; f(d)) y se aproximan a la recta tangente, observamos que por izquierda y por derecha obtenemos dos rectas (una de color rojo y la otra de color azul) que tienen distinta pendiente. Entonces, los límites laterales del cociente incremental cuando **h** tiende a cero son diferentes. Por lo tanto, el límite del cociente incremental cuando **h** tiende a cero no existe y, en consecuencia, f'(d) no existe.
A los puntos que poseen las características de (c; f(c)) y (d; f(d)) se los llama **puntos angulosos**.
En el caso del valor **e**, no existe f(e), ya que no está definida, con lo cual tampoco existe f'(e).

Conclusión
No existe la derivada de una función en los valores donde la función no es continua, tiene puntos angulosos o la recta tangente es vertical.

Supongamos que una función f(x) es derivable en un valor **a**. ¿Será continua en dicho valor? Analicemos esta cuestión.

Si f(x) es derivable en **a**, entonces, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es un número real.

Como **x** tiende a **a**, entonces, $x - a$ tiende a 0. Si $f(x) - f(a)$ no tendiera a 0, el límite sería infinito y la función no sería derivable en **a**. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$ es continua en **a**.

Conclusión
Si una función es derivable en un valor a**, entonces, es continua en ese valor. Por lo tanto, si una función no es continua en un valor** a**, entonces, no es derivable en ese valor.**

En cambio, si sabemos que una función es continua en un valor **a**, no podemos afirmar si es o no derivable en dicho valor. Por ejemplo, en la página 18 analizamos la función $f(x) = |x|$, que es continua en cualquier valor de su dominio, o sea, en $\mathbb{R}$, pero no es derivable en 0 a pesar de que $0 \in \mathbb{R}$.
Hasta aquí, calculamos la derivada de una función en un valor. Es posible, también, hallar la derivada de una función en cada uno de los valores donde dicha función está definida, obteniendo una nueva función que calcula la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función dada en cada uno de sus puntos. Esa nueva función se llama **función derivada**.

Las páginas 25 a la 111
no disponibles