Matemática I

GUÍA DOCENTE

longseller
EDUCACIÓN

Presentación

Matemática I, II y III es una propuesta innovadora de materiales transportables a la carpeta de trabajo de cada estudiante. Se ofrece para cada año una serie de trabajos prácticos con secuencias de actividades organizadas, que atienden a los tres momentos básicos del trabajo en la clase: *revisión*, desarrollo y ejercitación. Se presenta, además, un Anexo teórico con textos explicativos, que el estudiante puede consultar cada vez que lo necesite.
Cada trabajo práctico presenta una primera página de actividades de revisión, con problemas que permiten abordar conocimientos anteriores, pero que se explicitarán en una puesta en común con el fin de introducir los nuevos. El desarrollo de cada trabajo práctico está formado por dos o tres *secuencias* de trabajo. Por último, una *batería* de problemas finales permite que los alumnos vuelvan a utilizar las nociones y procedimientos trabajados.
Este cuadernillo ofrece una guía para abordar las secuencias didácticas de cada trabajo práctico: se describe cómo están ordenadas las actividades y cómo trabajar con ellas. Se presentan, además, las respuestas y soluciones para todas las actividades del libro.

Secuencias didácticas

Cada una de las secuencias que integran los trabajos prácticos de *Matemática I* toma un tema eje para cuyo aprendizaje es necesario que los alumnos resuelvan las actividades propuestas, ya que en todos los casos ese tema se aprende resolviendo una serie de problemas relacionados con él. En este cuadernillo se explica de manera detallada la variedad de contextos elegidos para plantear cada noción y la complejización paulatina que se propone a lo largo del T. P. En este sentido, la descripción que ofrecemos sólo se concentra en los puntos nodales de cada secuencia. Aquí ofrecemos, además, un análisis pormenorizado de los problemas que implican alguna dificultad particular para los alumnos o que son centrales para el tratamiento del concepto eje.

Trabajo Práctico Nº 1 | Números naturales y enteros y sus operaciones

En I° año es necesario, antes de introducir nuevos campos numéricos, profundizar el conocimiento de la multiplicación y la división con nuevos significados, estudiar las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto, e introducir dos nuevas operaciones, la potenciación y la radicación. Para ello, el T. P. N° 1 avanza desde la resolución de algunas situaciones con cálculos particulares, hacia la producción de fórmulas para un caso general, analizando su validez para distintos ejemplos.

Primera secuencia: Multiplicación, división, potenciación

El **problema 2** presenta una situación sencilla desde el contexto y el cálculo, pero que requiere identificar los datos que hay que considerar (cantidad de platos, guarniciones y postres) y hacer un recuento exhaustivo de las combinaciones para responder. Este recuento puede hacerse inicialmente organizando una lista o un diagrama de árbol, para poder generalizar después el cálculo a través de multiplicaciones.
Si sólo aparecieran en la clase estrategias de conteo sobre una lista de platos, sin identificación de las categorías (platos, guarniciones y postres), se puede plantear la situación para 2 platos con 3 guarniciones y 2 postres, y después analizar todas las combinaciones. Si la vinculación con la multiplicación no apareciera en las resoluciones de los alumnos, se puede aumentar la cantidad de platos y guarniciones para que las estrategias de las listas o del diagrama resulten largas o costosas y esto lleve a buscar alguna regularidad que permita un procedimiento más corto. Es posible que en un principio se realicen varios cálculos para después pasar a uno solo. Tres formas diferentes de hacerlo son:

Hay 5 platos con 3 guarniciones, lo que da 15 combinaciones saladas. Con 4 posibilidades de postres dan 60 menús y 2 platos sin guarnición; con 4 postres son 8 menús más. $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ $2 \cdot 4 = 8$ $60 + 8 = 68$	Las combinaciones saladas son 17: 5 platos con 3 guarniciones distintas son 15, y 2 más, 17. Si para cada una hay 4 postres posibles, hay 17 x 4 = 68 menús. $5 \cdot 3 = 15 + 2 = 17$ $17 \cdot 4 = 68$	Los platos salados son 15 con guarnición y 2 sin guarnición. Cada uno de ellos tiene 4 postres posibles. $(5 \cdot 3 + 2) \cdot 4 = 68$

Si en el momento de comparar procedimientos no aparecen distintas producciones entre los alumnos, el docente puede plantear varios cálculos para que los alumnos determinen si alguno/s de ellos permite/n resolver el problema; por ejemplo: $5 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 =$; $5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 =$; $7 \cdot 3 \cdot 4 =$; $(5 \cdot 3 +2) \cdot 4 =$. Esto también dará lugar a revisar el uso de paréntesis y de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

La lectura del apartado teórico en la página 150 y el **problema 3** permiten sistematizar el uso del diagrama de árbol y su relación con la multiplicación. El **problema 4** plantea un desafío numérico que no se relaciona con el contexto del problema 2, pero permite aplicar la estrategia de cálculo para completar su comprensión. Aquí también se puede pedir a los alumnos que elaboren un problema similar.

El **problema 5** retoma el contexto del problema 2 para profundizar el análisis. El **ítem a.** permite explorar cómo varía el resultado cuando se modifica un dato que es término o factor en el cálculo:

> 2 platos más de carne $[(5 + \mathbf{2}) \cdot 3 + 2\ ] \cdot 4$;
> 2 platos más de pastas $(5 \cdot 3 + 2 + \mathbf{2}\ ) \cdot 4$;
> 2 postres más $(5 \cdot 3 + 2) \cdot (4 + \mathbf{2}) =$

El **ítem b.** lleva a la producción de cálculos con factores iguales, lo que da lugar a la notación con base y exponente, usualmente nueva para los alumnos. Para resolver el **ítem c.** los alumnos deben determinar primero de cuántos días consideran el año escolar que, por ejemplo, se podría estimar considerando 9 meses de 4 semanas de 5 días (180). (Dado que el problema intenta poner el foco del análisis en la potenciación, no es importante si se toma un valor u otro.) Para el cálculo podrían proceder por tanteo, preguntándose qué número multiplicado 3 veces por sí mismo da un número cercano, pero mayor a 180, lo que equivale a encuadrar el resultado de la raíz cúbica de 180 : $5^3 = 125 < 180 < 216 = 5^3$.

El problema del **Episodio 1** permite revisar la relación entre base, exponente y potencia en otro contexto. Aunque los alumnos podrían resolverlo inicialmente usando tablas, también se puede pensar así:

> Si el virus se activa cada 5 minutos, en 30 minutos se activó 6 veces, y si cada vez toma 10 direcciones afecta a $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$, y como $1000 = 10^3$, en 3 pasos que son 15 minutos infecta a 1000. En el caso del otro virus es necesario averiguar qué numero multiplicado por sí mismo 5 veces da como resultado 3125; en este caso, $x^5 = 3125$.

Los **problemas 9, 10** y **11** requieren el análisis de las relaciones entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto. Primero se trata de resultados únicos y después se presentan casos donde hay más de una respuesta correcta. Se trata de explicitar la relación entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto a propósito de la resolución de los problemas, ya que esto da lugar a una comprensión diferente de la que se obtiene cuando esta relación se presenta a los alumnos y luego se aplica en distintos ejercicios.

Segunda secuencia: Propiedades de las operaciones

El trabajo con las propiedades de las operaciones también se inicia con problemas numéricos, con un único resultado, para pasar luego a la formulación de expresiones generales en las que hay que utilizar letras. Seguramente los alumnos pueden aplicar las propiedades correctamente cuando se indica hacerlo en una consigna directa, como "Asociá y resolvé" o "conmutá y resolvé". Sin embargo, no es frecuente que las reconozcan como herramientas y las apliquen espontáneamente.
En estos primeros problemas se trata de identificar qué transformaciones se pueden hacer en un cálculo para resolverlo más fácilmente y asociar las propiedades de las operaciones con algunas estrategias de cálculo mental. Por ejemplo, en el **problema 12**, asociar primero los factores cuyo producto es la unidad seguida de ceros simplifica el cálculo.
En el **problema 14** discutir acerca de la validez general del procedimiento requiere descomponer el 15 en 10 + 5, expresar el 5 como 10/2 y aplicar la propiedad distributiva: $n \cdot 15 = n \cdot (10 + 10/2) = n \cdot 10 + n \cdot 10/2$. En este caso también es posible invitar a los alumnos a proponer distintas estrategias de cálculo y fundamentarlas reconociendo las propiedades utilizadas. También interesa analizar la conveniencia de una u otra estrategia según las cifras involucradas. Por ejemplo, para multiplicar por $321 \cdot 15$ tal vez sea más rápido si se procede haciendo: $321 \cdot 3 \cdot 10 : 2 = 9630 : 2$, lo que no ocurre para $968 \cdot 15$.
El **problema 15** también involucra las propiedades pero de manera más general. Es posible que algunos alumnos intenten primero utilizar ejemplos numéricos, pero es poco probable que estos ejemplos orienten la solución que se advierte sólo cuando se trabaja con letras: $a \cdot (a + 1) = a \cdot a + a = a^2 + a$. Los **problemas 16** y **17** requieren expresar primero un cálculo en función de una situación concreta para luego obtener una expresión general. El uso de distintas calculadoras en el **problema 18** pone en evidencia la necesidad de precisar el orden en que se realizan las operaciones y el uso de paréntesis. La discusión a propósito de los resultados que se obtienen con distintas expresiones, que pueden ser equivalentes o no, es más significativa que la resolución de numerosos cálculos en los que se combinan distintas operaciones y símbolos sólo para controlar si el resultado final es correcto o no.

Trabajo Práctico Nº 2 | Números naturales: divisibilidad y regularidades

Una cuestión central del trabajo en I° año es introducir a los alumnos en la

Primera secuencia: Múltiplos y divisores

En el **problema 4**, se pide a los alumnos que den cuenta del procedimiento utilizado para llegar a la respuesta. Esta estrategia didáctica permite al docente realizar una puesta en común donde se da sentido a las nociones de múltiplo y divisor en el contexto de resolución, intentando establecer algunas definiciones. A su vez, la confrontación de procedimientos pone en evidencia la necesidad de buscar la *práctica de formular conjeturas y producir argumentos para validarlas, aceptando que se trata de un trabajo a largo plazo en el que se va avanzando en los niveles de generalidad y en su precisión. En este sentido, el trabajo con algunas nociones matemáticas vinculadas a la teoría de números brinda un campo propicio para el análisis de conceptos como múltiplo y divisor, el estudio de las relaciones entre los criterios de divisibilidad y las reglas del sistema de numeración, así como la búsqueda de regularidades en colecciones de números, son algunos de los temas seleccionadas para el desarrollo de conjeturas y argumentos que las validen.*

manera de comunicar a otros algo del quehacer matemático puesto en juego.
Los **problemas 5, 6** y **11** continúan con el trabajo planteado sobre las nociones de múltiplo y divisor, pero sus respuestas requieren un análisis de posibles soluciones en el contexto de cada situación. En tanto, los **problemas** del **7** al **10, 12** y **13** son intramatemáticos, e intentan acercar a los alumnos preguntas que permitan reflexionar sobre las relaciones estudiadas, avanzando con la noción de números primos y compuestos. Por ejemplo, en el problema 12:

Algunos alumnos, para decidir si un número es, por ejemplo, múltiplo de 7, lo dividen por 7 y verifican si el resto es 0.	Otros, en cambio, tratan de expresar el número como un múltiplo de 7, recorriendo la tabla del 7 hasta expresar el número como el producto de 7 por “algo”.

Es importante fomentar la circulación en la clase de estas maneras de pensar en la relación, ya que permite a los alumnos establecer con mayor facilidad la relación entre múltiplo y divisor.

Segunda secuencia: Criterios de divisibilidad

La relación entre criterios de divisibilidad y reglas del sistema de numeración no son evidentes para los alumnos. Por eso, resulta interesante incursionar en estas propuestas recordando las conclusiones a las que arribaron en el trabajo con múltiplos y divisores.
El trabajo con ejemplos –que suele ser la manera en que los alumnos justifican las afirmaciones del **problema 15**– puede cumplir distintas funciones, y no siempre permite establecer conjeturas. Además, en ocasiones, el establecimiento de una conjetura general puede realizarse antes de proponer algún ejemplo. Pero también es cierto que un trabajo con ejemplos donde éstos sean tratados de una manera genérica enriquece tanto el establecimiento de una conjetura como la argumentación sobre su validez.

Tercera secuencia: Patrones numéricos

Los **problemas 19, 20** y **21** introducen el trabajo e intentan que los alumnos desarrollen ciertas capacidades para enunciar características de algunos patrones numéricos establecidos en distintas colecciones de números.
En el **problema 22** se trata de que los alumnos encuentren ocasión de utilizar el recurso algebraico a través de su resolución. En éste se exige la exploración de regularidades en una cierta colección, o la generalización de un procedimiento aplicado a un caso particular. Al tratarse de un problema abierto, permite desencadenar procesos de búsqueda sin que los alumnos apelen a un algoritmo ya establecido. Algunos de los procedimientos pueden ser:

Dibujar la situación, intentando utilizar el mayor número posible, para formular una conjetura.	Plantear una conjetura y probarla con los valores numéricos que están en el problema y otros que se les ocurra a los alumnos.	Recurrir al análisis de los divisores de cada número, comenzando por el 1.	Establecer la relación entre el color de la ficha y la cantidad de divisores del número que corresponde al orden de la ficha en cuestión.

Tratar de encontrar una manera de comunicar que dé cuenta de las fichas blancas llevaría a los alumnos a generalizar la estrategia utilizada y darle un sentido a la utilización de expresiones de tipo algebraico, que en este año escolar pueden consistir tan sólo en su formulación en lenguaje coloquial.

Trabajo Práctico Nº 3 | Números racionales y sus operaciones

En este T. P. se propone un trabajo que apunta a consolidar y avanzar en algunos de los sentidos de las fracciones trabajados en el segundo ciclo: fracciones en el contexto de la medida y fracciones en el contexto de la proporcionalidad. A partir de este trabajo se retoma la noción de fracciones equivalentes. Las actividades tienden a profundizar el vínculo entre las diferentes maneras de representar los números racionales, lo que favorecerá la interpretación de que se trata de un mismo objeto matemático al que se accede por diferentes representaciones.
El estudio del orden, la densidad, las operaciones aritméticas y sus propiedades permitirán establecer las similitudes y las diferencias entre el funcionamiento de los números naturales y los racionales.

Primera secuencia: Usos y representaciones

Si bien durante el segundo ciclo se han resuelto problemas en los cuales las fracciones resultaban ser un recurso necesario para medir, para Iº año se propone complejizarlos. La finalidad de esta secuencia es que los alumnos pongan en juego nociones conocidas y que éstas sean retomadas durante la puesta en común: “La fracción 1/b es la que iterada *b* veces equivale a un entero” y “La fracción a/b es la que contiene *a* veces 1/b”. En esta línea, al proponer el **problema 5** es fundamental que el docente no permita el uso de unidades auxiliares, por ejemplo, una regla, y proponga trabajar con hilos o tiras de papel que reproduzcan la unidad y los segmentos por medir. La primera medición propuesta en el **ítem a.** no ofrece ninguna dificultad dado que la medida del segmento N respecto de M es un número natural.

El segmento M cabe dos veces en N. N mide el doble de M (N = 2M).

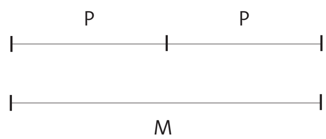
La segunda medición también puede realizarse utilizando estrategias conocidas:

El segmento M cabe una vez y un poco más en O.
Doblo la tira de papel (o el hilo) que corresponde a la unidad.
M cabe una vez y media en O, por lo que O mide 3/2 de M (O = 3/2M).

La tercera medición ofrece una dificultad: la unidad es mayor que el segmento a medir. En función de la longitud de los segmentos seleccionados, es posible que algunos grupos respondan de los siguientes modos:

Si doblo por la mitad el segmento M coincide con P, por lo que P mide la mitad de M (P = M/2).

Repetimos M y P hasta que coincidan.



Luego, 1 vez M equivale a 2 veces P, por lo que P mide la mitad de M (P = M/2).

Durante la puesta en común es fundamental promover una discusión en torno a las ventajas y desventajas de ambas estrategias en función de su eficacia. Esto permitirá al docente destacar que para medir una cantidad C respecto de otra considerada como unidad D es posible iterar ambas hasta que coincidan, es decir, determinar el mínimo múltiplo común entre ambas. Se trata entonces de encontrar dos números naturales *a* y *b* tales que: a · C = b · D, lo que involucra una aproximación intuitiva a la noción de conmensurabilidad. A partir de la última expresión se deriva que C = a/b · D (la medida de C respecto de D es a/b) y que D = b/a D (la medida de D respecto de C es b/a). De no surgir estrategias como esta última, el docente podrá preguntar cómo procederían si se prohibiera doblar los hilos o las tiras de papel; o bien poner la estrategia a consideración como elaborada por un grupo de otro I°; o bien proponer que midan un nuevo segmento cuya medida sea, por ejemplo, 4/3 de M.

El **ítem b.** permite establecer dos conclusiones. Una es que si se considera como unidad el doble del segmento M, al que llamamos M', las medidas de los restantes segmentos se reducirán a la mitad: N = M'; O = 3/4M' y P = 1/4M'. La otra es que si se considera como unidad la mitad del segmento M, al que llamamos M'', las medidas de los segmentos se duplicarán: N = 4M''; O = 3M'' y P = M''.

El **ítem c.** avanza en la misma línea y apunta a profundizar las relaciones entre la medida de un segmento considerando como unidad, el doble y la mitad de otro sin efectivizar las mediciones respecto de este último (unidad doble de N: N', entonces M = 1/4N' y unidad mitad de N: N'', entonces M = N').

La remisión al Anexo teórico propuesta en el **problema 6** permitirá avanzar en la eficacia de la estrategia de iteración de segmentos para resolver problemas de medición.

Continuando en el trabajo de las fracciones en el contexto de la medición, se propone, en los **problemas 7**, **8** y **9,** un trabajo diferente: reconstruir la unidad a partir de una fracción determinada.

El **problema 10** permite trabajar otro sentido de las fracciones. Se trata de situaciones de proporcionalidad directa en las que la constante de proporcionalidad es un número racional, y que apuntan a establecer una relación entre dos conjuntos de números en los que la que las cantidades que se corresponden forman razones equivalentes. Avanzando en la noción de equivalencia en el contexto de la fracción como cociente entre números naturales, el **problema 12** permite consolidar la elaboración del algoritmo tradicional.

En el marco de la articulación entre la escritura fraccionaria y decimal de los números racionales, se proponen los **problemas 13**, **14** y **15,** cuya finalidad es que los alumnos establezcan las características que debe tener una fracción para que su escritura decimal sea finita o periódica. Finalmente, se amplía el trabajo en torno a la articulación entre diferentes representaciones de los números racionales incorporando la recta numérica.

Segunda secuencia: Propiedades y relaciones

Si bien los números naturales son un apoyo para la presentación de los números racionales, es imprescindible poner especial énfasis en las diferencias entre ambos conjuntos, pues de lo contrario se pueden realizar extensiones que conducen a respuestas erróneas. Así, por ejemplo, respecto de la relación de orden, resulta habitual que al comparar números racionales expresados en forma decimal, se piense que si ambos tienen la misma parte entera, es mayor el que tiene más cifras decimales, como aparece en el **problema 22**.

Los **problemas 23** y **24** trabajan alrededor del tema de la densidad, ya que es necesario que sean los alumnos los que establezcan que entre dos naturales no existe otro número natural, en tanto que entre dos racionales siempre es posible encontrar otro racional. A propósito de esta misma propiedad, el **problema 26** permite concluir que mientras en el campo de los números naturales todo número tiene uno siguiente, en el campo de los racionales no es posible determinarlo.

Tercera secuencia: Operaciones y propiedades

En este apartado se retoma el trabajo en torno a la suma y la resta de números racionales y sus propiedades, y se proponen actividades tendientes a consolidar el sentido de la multiplicación y de la división entre racionales no naturales.
Con respecto a estas últimas operaciones, se continúa diferenciando entre naturales y racionales, poniendo en cuestión ideas que funcionan en el campo de los números naturales ("multiplicar agranda" o "dividir achica"), pero que no son extensibles al campo de los números racionales. Con tal propósito ha sido pensado el **problema 37**, en el que se busca que los alumnos arriben a las siguientes conclusiones:

Para obtener un número menor que 4/5, se debe multiplicar 4/5 por cualquier número positivo menor que 1.	Para obtener un número mayor que 4/5, hay que multiplicarlo por cualquier número mayor que 1.	Para obtener un número menor que 4/5, se debe dividir 4/5 por cualquier número mayor que 1.	Para obtener un número mayor que 4/5, hay que dividirlo por cualquier número positivo, no nulo, que sea menor que 1.

Trabajo Práctico Nº 4 | Figuras en el espacio y en el plano

En I° año, nos proponemos profundizar el estudio de las figuras y de los cuerpos, a través de actividades que implican la puesta en funcionamiento de algunas propiedades como medio para anticipar y establecer conjeturas que permitan la elaboración de nuevas propiedades, de nuevas relaciones, de nuevos conceptos. En estas actividades se interactúa con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado, en el cual las figuras-dibujos son representaciones. Para ello hemos elegido dos tipos de actividades: las de construcción, y las de exploración, formulación y validación de conjeturas. En ambos tipos de actividades el desarrollo de argumentaciones por parte de los alumnos cobra una importancia fundamental.

Primera secuencia: Cuerpos

El objeto de estudio de los problemas de esta secuencia es el de las relaciones que existen entre los distintos elementos de los cuerpos, que son las que permiten caracterizarlos. En particular, las diferentes representaciones posibles presentan dificultades ligadas al conjunto de reglas que es necesario dominar para realizar cada una de ellas. Cada representación implica una mirada parcial sobre el cuerpo geométrico, y elegir una implica tomar algunas características de éste y no otras.
El **problema 4** retoma el trabajo sobre las características de los cuerpos del problema 1. Para ello, se presentan tarjetas que intentan definir una pirámide, aunque dos de ellas dan información que también corresponde a otros cuerpos. Hay que considerar que, en ocasiones, los alumnos tienden a determinar sólo si no hay contradicción con el cuerpo elegido y no se dan cuenta de qué otros cuerpos pueden estar incluidos en esas definiciones. Es una buena oportunidad para trabajar con expresiones del tipo: todos, algunos, al menos uno, ninguno, etc.
La intención del **problema 7** es poner en funcionamiento la idea de definir los prismas, partiendo de cuerpos que son diferentes. Además, se busca que los alumnos reconozcan la relación entre lados y altura, que resulta indispensable en la determinación del volumen que apela al producto de tres dimensiones.

Segunda secuencia: Armando y desarmando cuerpos

Los **problemas 9** y **10** ponen a los alumnos a trabajar sobre representaciones de objetos físicos. Este primer trabajo intenta poner en evidencia ciertas regularidades de los objetos, que permiten su análisis geométrico. Es importante destacar que cuando se habla en lenguaje coloquial sobre la "forma" de un objeto, los alumnos pueden estar haciendo referencia al tamaño, a su disposición o a su aspecto. Pero habrá que señalar que, matemáticamente, la idea de *forma* está vinculada a *semejanza*.

Los **problemas 12** y **13** trabajan sobre la formulación de instrucciones para construir el desarrollo de distintos cuerpos y, posteriormente, realizar su armado. El instructivo que pide el problema 12 se puede armar apoyándose en algunas de las respuestas posibles del **problema 11**. Efectivamente, los desarrollos **I**, **II** y **V** pueden utilizarse para construir un cubo con arista 4. Algunos instructivos para quienes se apoyen en el desarrollo **I** pueden ser:

Dibujá 4 cuadrados de 4 cm de lado en una fila horizontal, uno al lado de otro. Después, dibujá uno arriba del primero y otro debajo del último.

Dibujá 4 cuadrados de 4 cm de lado en fila, uno al lado de otro. Después, dibujá un cuadrado igual a los anteriores arriba del primero y otro debajo del último.

Dibujá 4 cuadrados de 4 cm de lado en fila, de modo que el segundo tenga un lado coincidente con el primero, el tercero, un lado coincidente con el segundo y el cuarto con el tercero. Después, dibujá un quinto cuadrado igual a los anteriores de modo que uno de sus lados coincida con uno de los lados del primero de la fila. Debe ser uno de los lados consecutivos al que coincide con el tercer cuadrado. Por último, dibujá un sexto cuadrado igual a los anteriores, con un lado coincidente con el último de la fila. Debe quedar en posición opuesta a la anterior respecto de la fila de cuadrados inicial.

En este tipo de actividadeses, es importante darle el instructivo a otro grupo para que trate de construir la figura y de ese modo discutir sobre la información que el instructivo aporta: si es completa, si es clara, si usa el lenguaje disciplinar apropiado. En este caso, se puede discutir sobre la posición de primera fila de cuadrados, si deben ser contiguos o no, si tienen la misma medida de lado o no.
En los **problemas 15** y **17**, se trata de relacionar las medidas de los lados de los rectángulos que forman el desarrollo de distintos prismas rectangulares. En el **problema 19**, la propuesta vuelve a poner en relación la geometría con los objetos del mundo físico. En todas las propuestas de construcción de cuerpos con cartulina, se debe tener en cuenta que se exige que los alumnos construyan las caras y las organicen para pasar del plano al espacio.

Tercera secuencia: Figuras planas

El **problema 25** permite trabajar con una gran variedad de figuras planas y distintas maneras de clasificarlas. Se debe tener en cuenta que las clasificaciones no son únicas y responden a las relaciones entre elementos que se pongan en juego. El **problema 26** es un típico trabajo de copiado de figuras. Este tipo de actividad también permite enfrentar a los alumnos con el análisis de las propiedades de las figuras, ya que reproducirlas exige tomar en cuenta sus elementos, sus medidas, conservar ciertas propiedades, seleccionar los instrumentos más convenientes por utilizar, etc. A diferencia de otras propuestas, en éstas no es necesario explicitar las propiedades, mientras se realiza la actividad. Para llevar a cabo el trabajo de formulación de propiedades, debe realizarse un trabajo colectivo de comunicación de procedimientos. En esa instancia los alumnos pueden compartir las producciones con sus pares y compararlas. El docente puede seleccionar algunos trabajos y guiar la comparación de recursos utilizados a través de preguntas como: ¿Por dónde empezaron? ¿Alguien empezó el copiado por otro lado? ¿Todos usaron compás? ¿Quién usó la escuadra?

Cuarta secuencia: Triángulos

Los **problemas 32** y **33** permitirán comenzar a trabajar para arribar a la propiedad triangular. En el intento de realizar una construcción, pueden aparecer diferentes respuestas:

Algunos alumnos perciben la imposibilidad expresando: "los lados no cierran", "estos segmentos no alcanzan" o "los lados no se juntan".

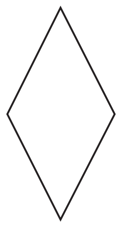
Otros, cometiendo algún error, logran armar un triángulo "imposible".

La segunda situación da oportunidad para discutir si, con los datos provistos, existe el triángulo o no. Así, se puede arribar al enunciado de una propiedad a través de la realización de un dibujo, del análisis colectivo y de su construcción. Esta estrategia didáctica ayudará al alumno a adquirir cierto convencimiento sobre la validez de la propiedad.
En los **problemas 34** a **37**, se dan distintos elementos de un triángulo y se pide su construcción. En algunos casos, hay muchos triángulos posibles, en otros casos, ninguno y otras veces el resultado es único. Para responder a las actividades es necesario establecer en la clase qué se considera como igualdad (o congruencia) de triángulos; por ejemplo: "Dos triángulos son iguales si tienen iguales sus tres lados y sus tres ángulos".
Para las respuestas sobre existencia y unicidad de la solución, los alumnos, en este ciclo, dan justificaciones basadas en la experimentación real o mental. Si bien el objetivo al que se apunta es la entrada en el razonamiento deductivo, no se debe perder de vista que se trata de un proceso y que es necesario el tránsito por una variedad de actividades antes de lograr la meta.
En los **problemas 34**, **35** y **36**, que involucran ángulos, es necesario incluir un trabajo de revisión sobre el traslado de ángulos con compás y la medida de ángulos con un transportador.

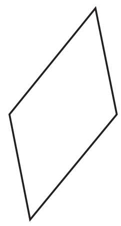
Quinta secuencia: Cuadriláteros

En los **problemas 38** a **41**, donde se aborda el tema de los cuadriláteros, se intenta poner en evidencia algunas relaciones entre lados, ángulos y diagonales que permiten distintas clasificaciones, así como determinar inclusiones entre algunos de ellos.
Justamente, la cuestión de la inclusión entre diferentes clases de cuadriláteros es difícil de encarar durante el segundo ciclo porque muchos alumnos entienden aún las clasificaciones como dicotómicas. Comprender que un cuadrado puede ser rectángulo y que también puede ser rombo es una conceptualización que puede surgir de la discusión sobre las propiedades de cada uno de los cuadriláteros que puede darse en la puesta en común de los problemas 38 y 40.
En el problema 41 se pone de manifiesto que con un mismo instructivo es posible construir más de una figura. Por ejemplo:

Dibujar un rombo con diagonales 5 y 3.



Dibujar un paralelogramo propiamente dicho con diagonales 5 y 3.



En este caso, poseer diagonales de distinta medida que se cortan en sus puntos medios es una propiedad de ambas figuras. Es interesante aquí que el profesor plantee como discusión qué información habría que agregar para que pudiera obtenerse sólo una de las dos figuras.

Trabajo Práctico Nº 5 | Medidas y mediciones

Durante los años anteriores los alumnos ya realizaron mediciones y cálculos con medidas para diferentes magnitudes, estableciendo expresiones equivalentes con distintas unidades para una misma cantidad. En este año, es importante sistematizar estos conocimientos y articularlos a propósito del análisis de la estructura de distintos sistemas de unidades. Asimismo, interesa reflexionar sobre las fórmulas conocidas y elaborar otras avanzando en el uso de letras para expresar variables y el estudio de variaciones.

Primera secuencia: Mediciones y sistemas de medición

El **problema 4** pone en juego la necesidad de expresar una misma cantidad con unidades que corresponden a distintos sistemas, lo que se vincula con conocimientos sobre proporcionalidad.

Recorrido de Nemo

1 milla naútica → 1852 m

3 millas (1 legua) → 1852 m · 3 = 5556 m

20.000 leguas → 5556m·20.000= = 111.120.000 m

Recorrido de Fogg

1 milla terrestre → 1609 m

26000 millas terrestres → 1609 m · 26.000 = = 41.834.000 m

Como los resultados expresados en metros tienen 8 y 9 cifras, tendría sentido buscar sus equivalentes en kilómetros, lo que daría lugar a una nueva reflexión sobre el uso que se da a distintas unidades. Es importante que cuando se realizan equivalencias entre unidades, éstas respondan a una necesidad del problema y no a cálculos mecánicos que carecen de sentido (como lo sería expresar 4,5 cm en kilómetros). Aunque la resolución anterior es la que se espera que realicen los alumnos, también puede pensarse que no es necesario calcular los recorridos en metros ya que Nemo recorrió 60.000 millas naúticas y Fogg, 26.000 millas terrestres, y como las millas náuticas equivalen a más metros que las terrestres se mantiene la diferencia a favor de Nemo.

Un análisis similar es el que se plantea en el **problema 6,** cuando se compara 10 millas con 10 kilómetros o las medidas en pulgadas con las medidas en centímetros ya que no se trata de calcular sino de determinar que si la unidad es más pequeña, la medida será mayor, discusión que se precisa en el **problema 9** y que puede completarse con los **problemas 25**, **26** y **27** de la Batería.

En el problema del **Episodio 5** se presenta la comparación de medidas de tiempo con distintos calendarios para introducir el problema de la comparación de la estructura de distintos sistemas de unidades. Esta diferenciación se profundiza en el **problema 8**, en el que se comparan tres cuentas realizadas en sistemas de base 20, 10 y 60. Si bien es posible realizar algunas operaciones utilizando el sistema sexagesimal, su realización debería aportar a la comparación de los sistemas más que al cálculo en sí mismo.

Segunda secuencia: Perímetros y áreas

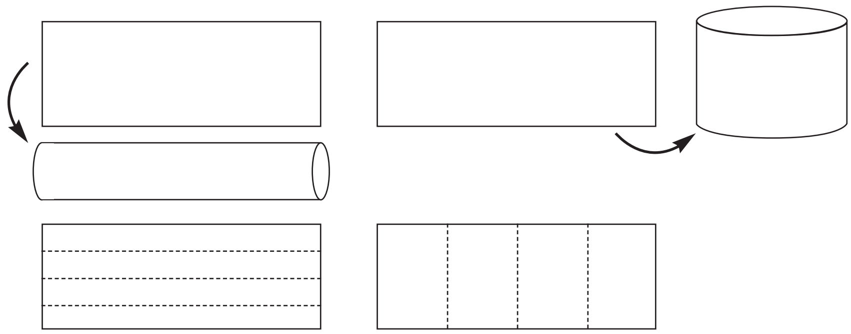
Dada la frecuente confusión entre perímetro y área que tienen algunos alumnos, interesa realizar un análisis conjunto de perímetro y área de distintas figuras, como se propone en el **problema 10**. Es probable que los alumnos consideren que un aumento en el perímetro (área) produce un aumento en el área (perímetro), sin tener en cuenta la variación de la forma de la figura.
En el **problema 11** se presenta una variación menos frecuente aún: la del perímetro de un triángulo en función de la variación de la amplitud de uno de sus ángulos. En ambos casos se busca un trabajo más ligado a la elaboración de conjeturas y su posterior validación que al cálculo. Las primeras exploraciones podrían realizarse a través de mediciones.
El **problema 14** introduce el tema de la variación del perímetro y del área en función de la variación de la longitud de los lados. Este análisis puede ampliarse con otras figuras regulares, anticipando las variaciones de proporcionalidad directa que se abordan en el T. P. N° 8.
Los alumnos seguramente ya han calculado áreas de triángulos aplicando la fórmula "base por altura dividido 2"; sin embargo, es posible que no hayan advertido que en un triángulo cada lado tiene su altura y que es posible tener 3 pares de datos para ese cálculo. Obtener esos datos por medio de mediciones en el **problema 12** llevará a resultados con algunas diferencias debidas a los errores naturales de toda medición. Se propone, entonces, abordar el tema del error con la lectura del Anexo teórico y plantear la necesidad de acotarlo para establecer los límites de las decisiones que se tomen sobre los resultados de los cálculos.
Los **problemas 15** a **19** involucran el uso y análisis de fórmulas. En el caso del 15 se trata de usar letras para denotar las medidas de los lados, y al expresar el cálculo se pueden obtener expresiones equivalentes, como $4a + 2b = 2\ (2a + b)$, lo que permitirá revisar algunas propiedades de las operaciones. Los problemas 16, 17 y 19 abordan el cálculo de la longitud de la circunferencia y el área del círculo. Nuevamente interesan más las justificaciones que den los alumnos que la aplicación mecánica de una fórmula para obtener un resultado. También es interesante discutir en estos casos cómo se evalúa la precisión del cálculo en función del tipo de problema que se está resolviendo y comparar, por ejemplo, las situaciones de los problemas 19 y 33 (en la Batería).

Tercera secuencia: Áreas, volúmenes y otras medidas

La exploración de las variaciones iniciada con el tema de perímetro se amplía al considerar otras magnitudes. La secuencia se inicia con el **problema 20**, donde se propone que los alumnos realicen anticipaciones sencillas que pueden comprobarse realizando algunas mediciones o cálculos. En el **problema 21** se retoma el análisis realizado para el perímetro y el área en el problema 10, pero sobre la relación área/volumen.
En el **problema 22** se propone ampliar la investigación considerando prismas o cilindros con la misma área lateral, pero distinta base y altura, sin tener en cuenta los dobleces que se necesitan en la realidad para armar los envases, y así fa-

vorecer algunas exploraciones numéricas a la vez que se analizan las fórmulas correspondientes. En estos casos es posible argumentar con distintos niveles de generalidad; así:

• Constatación empírica realizando mediciones



• Cálculo para algunos ejemplos particulares.

Volumen A = $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ Volumen B = $1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 4{,}5$

• Comparación de expresiones simbólicas de validez general.

Volumen A = $\left(1/4\ a\right)^2 \cdot b$ Volumen B = $\left(1/4b\right)^2 \cdot a$

Si b = 3 a

Volumen A = $\left(1/4a\right)^2 .3a = 3/8a^3$ Volumen B = $\left(1/43a\right)^2 .a = 9/8a^3$

El **problema 23** toma un contexto histórico real para profundizar el análisis de las relaciones entre las distintas dimensiones y formas de un recipiente y el volumen de granos que éste puede contener. Para precisar el análisis puede calcularse el área de la boca de cada recipiente y el volumen de un “colmo” con forma de pirámide o de cono de una altura equivalente; por ejemplo, a la cuarta parte de la altura del recipiente. En este punto puede ser interesante retomar la discusión acerca de la necesidad de acordar unidades comunes de medida, y de revisar esta necesidad en la evolución de los sistemas de unidades leyendo las páginas 59 a 61 del Anexo teórico.

Trabajo Práctico Nº 6 | Razones y proporciones

La resolución de problemas que involucran relaciones de proporcionalidad directa está presente, en forma implícita o explícita, en todos los años de la escolaridad básica y constituye un interesante eje de articulación, ya que permite vincular conocimientos sobre los distintos campos numéricos, las operaciones y la medida. Si bien es probable que los alumnos dispongan de la regla de 3 como procedimiento de cálculo para estos problemas, es im-

Primera secuencia: Razones y proporciones

Las diferentes formas de resolver el **problema 2** ponen en evidencia distintas propiedades de las relaciones de proporcionalidad. Para responder a la pregunta hay dos posibilidades:

• Averiguar, para cada marca, la cantidad de grasa que corresponde a una misma cantidad de yogur. Esto puede realizarse en un solo paso, a través de exploraciones sucesivas o usando regla de tres.

Lecherísima		Pandy	
125	1,2	200	5,8
1000	9,6	1000	29

Lecherísima		Pandy	
125	1,2	200	5,8
250	2,4	100	2,9
500	4,8	500	14,5
1000	9,6	1000	29

portante vincular este procedimiento con otros y analizar su economía en función de la situación planteada. Asimismo, se trata de sistematizar algunas propiedades de las operaciones con números racionales: en particular se amplía el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y la resta para los racionales al calcular índices, y se analiza el uso del inverso multiplicativo y algunas propiedades de las proporciones.

Lecherísima	Pandy
125 g ....1,2 g	200 g............5,8 g
1 g ....1,2 g / 125 g	1 g............5,8 g / 200 g
200 g.............1,2 g / 125 g · 200 g = 1,92 g	125 g ....5,8 g / 200 g · 125 g = 3,62 g

Para la misma cantidad de yogur, Pandy tiene aproximadamente el triple de grasa que Lecherísima.
En este caso, es posible afirmar que si se multiplica (o divide) un valor de una de las cantidades por un número, el valor correspondiente es igual al original multiplicado (o dividido) por el mismo número.
• Determinar la razón g de grasa / g de yogur para cada marca, expresándola en forma decimal o de porcentaje.

Lecherísima 1,2 g / 125 g = 0,0096 ⟶ 0,96%
Pandy 5,8 g / 200 g = 0,0232 ⟶ 2,32%

Para expresar la relación como un porcentaje se puede usar la idea de razones equivalentes o de proporción, o resolver por regla de tres.

$$\frac{1{,}2}{125} = \frac{x}{100} \qquad x = 1{,}2 \cdot \frac{100}{125}$$

$$1{,}2 \cdot 100 = 125 \cdot x \qquad x = \frac{1{,}2 \cdot 100}{125}$$

125 g .. 100%
1 g .... 100% / 125 g
1,2 g .. 100% / 125 g · 1,2 g

Vale la pena destacar que si bien las operaciones que se realizan son las mismas, las formas de interpretar el problema y de justificar los procedimientos son diferentes.
En el primer caso se usa la propiedad $\frac{a}{b} = \frac{a x c}{b x c}$ y en el segundo: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a x d = b x c$.
Si bien es cierto que para validar la propiedad usada en el primer caso se necesita usar la igualdad entre el producto de los medios y el de los extremos, los alumnos podrían hacer un uso de ella, tal vez ligado al trabajo con fracciones equivalentes, en el que no adviertan la relación entre ambas expresiones.
La relación entre grasa y yogur en Pandy es el triple que esa misma relación en Lecherísima. En este caso, se puede explicitar que la razón entre las cantidades que se corresponden es constante.
Si estos dos procedimientos no aparecen entre las producciones de los alumnos, es posible presentarlos para discutir si son correctos o no y por qué, o avanzar en la resolución de los ítems que siguen y discutir sobre los procedimientos después de resolver todos los ítems del problema.
Para resolver los **ítems b.** y **c.**, la variedad de datos que se presentan lleva a buscar los valores nutricionales que corresponden a una misma cantidad, por ejemplo, 1 litro, o a calcular razones. Si se calculan razones habrá que prestar particular atención al tema de las unidades ya que, por ejemplo, si se toman los datos de la imagen para el caso de la grasa, para Lido es de 33,8 g/l; para Coopi 0,03 g/cm^3; para Lohay 0,028 g/ml y para Ísima 0,0159 g/cm^3. En cualquiera de los casos será necesario establecer relaciones entre unidades de volumen y capacidad, y equivalencias entre unidades para cada magnitud.

En el **problema 3** se plantea nuevamente la necesidad de comparar relaciones entre distintas cantidades apelando al concepto de razón. En los **problemas 4** y **5** el análisis se centra en las propiedades de las proporciones. En el **ítem a.** es posible encontrar los números *m*, *n* y *t* por tanteo, pero en los siguientes ítems se espera que los alumnos puedan argumentar utilizando las propiedades. Por ejemplo: $m/n = t/3 \Leftrightarrow m \cdot 3 = n \cdot t \Leftrightarrow t/m = 3/n$. En **c.** es necesario definir qué tipo de número puede ser *m*, ya que si se está trabajando con *m*, *n* y *t* naturales, la respuesta está mal, pues *m* sería $5 \cdot 14/3$, que no lo es.
Tanto en este problema como en otros interesa analizar si la respuesta varía cuando se consideran distintos campos numéricos. En el **caso d.** hay infinitas soluciones: *n* y $3/4n$, ya sea que *n* se considere natural o racional. Los **problemas 16**, **17** y **21** también requieren un análisis de este tipo.
El **problema 6** plantea otro aspecto del trabajo con números racionales, ya que en el primer planteo el cociente no es 2,33 sino 2,3. Al usar la calculadora para dividir, es frecuente que los alumnos no reflexionen sobre la equivalencia entre las cifras que aparecen en el visor y el cociente que se busca.

Segunda secuencia: Porcentajes e índices de variación

Los **problemas 7 a 12** no presentan grandes desafíos en relación con la posibilidad de encontrar la respuesta, dado que cualquier problema que involucre porcentajes se puede resolver por regla de tres. Esta particularidad permite focalizar el trabajo de la secuencia sobre la argumentación, a propósito de la validez de distintos procedimientos, avanzando desde la comprobación numérica hacia la utilización de propiedades.
En el **problema 7** la presencia de la calculadora tiene un doble propósito: uno, instrumental, ligado al uso comprensivo de la herramienta, y otro, que apunta al desarrollo de la generalización, ya que se trata de explorar primero algunos resultados para después elaborar estrategias generales de cálculo que podrían o no expresarse a través de una fórmula.
El **problema 8 a.** puede pensarse de distintas maneras:

Los **ítems b.** y **c.** requieren la formulación de expresiones generales que pueden

50 · 0,85 = 42,5
\$50....... 100%
\$42,5... \$42,5 · 100% : \$50
= 85%
100% – 85% = 15%

\$50 · 0,85 = \$42,5
\$50 – \$42,5 = \$7,5
$\frac{7,5}{50} = \frac{x}{100}$ $x = \frac{7,5 \cdot 100}{50} = 15$

$\$50 \cdot 0,85 = \$50 \cdot \frac{85}{100} =$
= 85% · \$50
Si le cobran el 85%,
el descuento es del 15%.

obtenerse también de dos maneras, equivalentes, pero distintas:

$$P - 20\%\ P = (100\% - 20\%)$$
$$P = 80\%\ P = \frac{80}{100}\ P = 0,8 \cdot P$$

$$P - 20\%\ P = P - \frac{20}{100} P = P - 0,2 \cdot P =$$
$$= (1 - 0,2) \cdot P = 0,8 \cdot P$$

Aunque no es frecuente que los alumnos lo adviertan en forma espontánea, es necesario reconocer a P como factor común y vincularlo al uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta, lo que podrá hacerse a través de la comparación de los procedimientos utilizados con los ejemplos de la página 42 del Anexo teórico.
El **ítem d.** del **problema 8** y el problema del **Episodio 6** plantean la imposibilidad de sumar porcentajes que se realizan en forma sucesiva sobre una cantidad inicial que se va modificando.
Aquí es posible comprobar, primero, numéricamente y avanzar luego en la argumentación sobre los procedimientos explicitando las propiedades involucradas o distinguir estas diferentes formas de argumentar al comparar producciones de distintos alumnos o grupos de alumnos.

Tercera secuencia: Proporciones y repartos

El **problema 13** también da lugar a analizar la forma de operar usando las propiedades de las proporciones. En el **problema 15,** la recuperación de definiciones que se plantea permite sistematizar el trabajo realizado.

Trabajo Práctico Nº 7 | Lugar geométrico

Una noción importante en geometría es la de lugar geométrico*, referida al conjunto de todos los puntos que cumplen cierta condición. Esta noción permite relacionar nociones como: círculo, circunferencia, mediatriz y bisectriz. Este trabajo práctico plantea una serie de problemas para abordar la noción.*

Primera secuencia: Puntos y condiciones

En los **problemas 5**, **6** y **7** se apunta a encontrar una caracterización –el lugar geométrico– de todos los puntos que verifican una cierta condición. En una primera instancia, una fase exploratoria puede dar como conjetura que el conjunto buscado es la circunferencia. Queda luego la tarea de validar esta conjetura. Entonces es necesario justificar la condición teniendo en cuenta tanto los puntos que la cumplen como los que quedan fuera de ella. Es decir, hay que justificar que la condición es *necesaria* y *suficiente*.
En particular, analizaremos aquí el **problema 5**, donde se plantea la ubicación de puntos que equidistan de dos fijos. A partir de un primer momento de búsqueda, se pretende instalar una conjetura por parte de los alumnos: "Todos los puntos que equidistan se encuentran sobre una recta perpendicular al segmento que une los dos puntos fijos, y que pasa por su punto medio".
Posteriormente, es conveniente desprender este enunciado del contexto del problema y plantear la propiedad para los objetos geométricos que modelizan la situación de los amigos en el campo. El docente puede introducir el problema desde el punto de vista de la validación de la conjetura: "Ustedes afirman que si un punto se encuentra en la perpendicular a un segmento por su punto medio, la distancia a los dos extremos del segmento es la misma. ¿Cómo podemos asegurar que es así sin tener que medir en cada caso? ¿Cómo se puede asegurar para los puntos que no entran en el dibujo?".
Los criterios de igualdad establecidos de antemano permiten responder a estas preguntas. Por tratarse de una afirmación que resulta bastante visible en los dibujos, es posible que los alumnos no entren todavía en la necesidad de una validación y que sea el docente el que deba gestarla.
La recíproca de la conjetura también debe probarse, y ésta puede quedar totalmente a cargo del docente. Al finalizar la actividad se puede definir la mediatriz de un segmento.

La definición del objeto círculo debe estar clara para responder a esta actividad. Nuevamente se espera una cierta manipulación, con varios dibujos, que permita el establecimiento de una conjetura: "Todos los círculos que se pueden construir tienen su centro en la mediatriz del segmento". Los alumnos tienen que producir argumentos para justificar esta afirmación.

Segunda secuencia: Circunferencia y círculo

En este apartado los problemas avanzan sobre algunos elementos de círculo y circunferencia y sobre su relación con la noción de lugar geométrico. Para realizar las tareas que se proponen hay que, por un lado, actualizar la propiedad que caracteriza al centro de una circunferencia y, por otro, volver a utilizar el conocimiento construido sobre *lugar geométrico*.
El **problema 16** puede ser resuelto, por ejemplo, de las siguientes formas:

Algunos alumnos podrían pinchar el compás de manera azarosa, esperando que, al marcar la circunferencia, ésta coincida con el arco presentado. Seguramente ningún alumno pueda indicar cuál es el centro de la circunferencia si lo busca al tanteo.

Otros alumnos pueden asignarle al dibujo presentado más datos de los que el dibujo porta efectivamente y considerarlo un tercio o un cuarto de circunferencia. Entonces construirán a partir de ese "dato".

Otra posible solución consiste en ubicar tres puntos sobre el arco y trazar dos segmentos:
Luego, se trazan las mediatrices correspondientes a dichos segmentos: el punto donde se cruzan las mediatrices resulta el centro buscado.

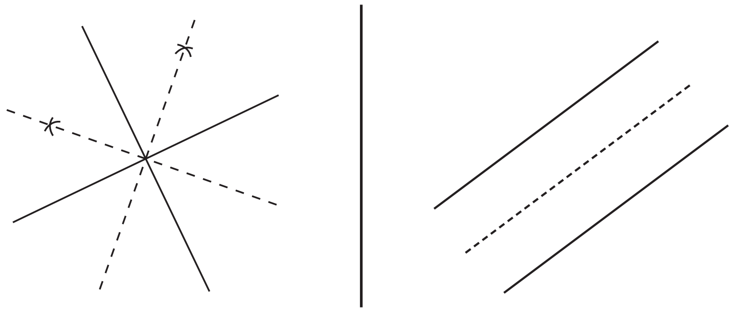
En el **problema 20,** a partir de construir y de comparar los distintos triángulos entre compañeros de manera intuitiva, los alumnos pueden conjeturar que en todos los casos se obtienen triángulos rectángulos. Sin embargo, entrar en el juego de *demostrar* en matemática supone poder validar las afirmaciones o conjeturas sin recurrir a la constatación empírica. Sin embargo, atención, no se está pensando en exigir demostraciones tal como se entienden en matemática. Se trata de un proceso que debe ser provocado y promovido por el docente desde las actividades que se proponen para realizar en el aula y desde el lugar que tiene la palabra de cada alumno. Debe esperarse que vayan mejorando la calidad de sus argumentaciones, aceptando al comienzo justificaciones incompletas, argumentaciones con poco formalismo o lenguaje impreciso.

Tercera secuencia: Mediatriz y bisectriz

El **problema 21** plantea al menos dos respuestas:

Si las dos varillas rectas se cortan, los puntos que equidistan se ubican sobre las bisectrices de los ángulos opuestos. Cualquiera de las alternativas siguientes puede ser propuesta por los alumnos.

Si las dos varillas rectas no se cortan y son paralelas, las monedas se ubican sobre una tercera recta paralela a ambas y que equidista de ellas.



El trabajo de confrontación de procedimientos habilita a establecer relaciones entre rectas, apuntando a la noción de bisectriz, que debe ser nuevamente utilizada para resolver los **problemas 28**, **29** y **30**.
El **problema 22** apunta a que los alumnos construyan, a partir de la condición que cumplen, el conjunto de puntos que forman la mediatriz, y que la retomen para resolver los **problemas 24** a **27**.

Trabajo Práctico Nº8 | Relaciones entre datos

En este T. P. se propone un trabajo que apunta a establecer vínculos entre datos provenientes de situaciones de diferente naturaleza: datos que provienen de relaciones de dependencia y variabilidad, y datos que provienen de recolecciones realizadas con fines estadísticos. En dicho trabajo se prioriza la utilización de formas de representación diferentes: en el primer caso, de gráficas cartesianas, tablas y fórmulas, y gráficas estadísticas y tablas, en el segundo. El objetivo es que los alumnos analicen la información que es posible leer y/o inferir a partir de la representación utilizada, como también las ventajas y desventajas que ofrecen las representaciones seleccionadas respecto del problema. Es importante observar que si bien se ha puesto especial énfasis en las mencionadas formas de representación, también se propicia la articulación entre el registro del lenguaje natural y el del dibujo.

Primera secuencia: Datos y representaciones

Para iniciar el tratamiento de las relaciones de dependencia y variabilidad, se propone el **problema 3**, cuya finalidad es que los alumnos interpreten la necesidad de elegir convenciones para ubicar puntos en el plano, y comiencen así a otorgarles sentido.
En el **problema 4a.** se promueve, a partir de una representación cartesiana, la articulación entre esa representación y otra, el dibujo. Para responder a las preguntas planteadas es necesario comparar las distancias representadas en el dibujo con las correspondientes en la representación cartesiana. De ello surge que el punto M corresponde a Alicia, el punto P a José, el punto O corresponde a Guillermo, el punto N a Rosa y el punto Q a Roberto. Para facilitar esta comparación se ha seleccionado la misma escala en ambas representaciones.
El **ítem b.** requiere un trabajo de mayor complejidad dado que, en conjunción con la información que se incluye en el texto (vehículo utilizado por algunas personas), la gráfica permite determinar datos desconocidos que no están representados. Para responder se puede razonar de dos maneras distintas:

Comparar el tiempo que utilizó Guillermo (7 minutos) con el tiempo de Roberto (15 minutos) dado que ambos viven a una distancia similar del trabajo. Como Roberto fue caminando, se puede inferir que Guillermo fue en auto o en bicicleta. Si se considera que Rosa, que viajó en auto, tardó 5 minutos en recorrer 2,5 km, y que Guillermo tardó 7 minutos en recorrer 1 km, es posible pensar que Guillermo viajó en bicicleta.

Si se considera que José, que viajó en bicicleta, tardo 10 minutos en recorrer 1,5 km. y que Guillermo tardó 7 minutos en recorrer 1 km, es posible pensar que Guillermo viajó en bicicleta, pues la velocidad de marcha de ambos es aproximada.

En el segundo modo de pensarlo, se espera que los alumnos reutilicen tales conocimientos para producir argumentos como los explicitados, dado que a propósito del trabajo con fracciones equivalentes, en el T. P. N° 3 se han realizado comparaciones entre velocidades de marcha.
En el **ítem c.** se promueve la conversación con un compañero con el objeto de realizar explicitaciones, lo que permitirá avanzar en la identificación de razonamientos no válidos (por ejemplo, considerar sólo uno de los datos, la distancia, y responder que Roberto y Guillermo viajaron a pie), como también en la pertinencia de los razonamientos válidos, dado que permiten "explicar mejor". Durante la puesta en común, el docente retomará las diferentes explicaciones, si es que surgen, promoviendo la discusión en torno a su validez. De surgir una única explicación es importante poner otra en consideración y solicitar a todo el grupo que analice su pertinencia. También es importante destacar la importancia de considerar exhaustivamente la totalidad de los datos involucrados: distancia, tiempo y vehículos utilizados.
La primera aproximación al estudio de funciones se realiza a partir de sus gráficas cartesianas. Para ello se proponen actividades que propician el análisis de las características de las gráficas y la identificación de los aspectos relevantes de la situación que se representa.
El **problema 7** no ofrece mayores dificultades y permite, a partir de la observación de la gráfica, abordar diferentes cuestiones. El **ítem a.** apunta a la identificación de las variables involucradas; el **ítem b.,** a lecturas de valores determinados de las variables en juego en ambos sentidos: preimagen-imagen e imagen-preimagen, y el **ítem c.**, a realizar inferencias a partir del análisis de las características de la situación que se modeliza. De todos modos, es recomendable no hacer referencia a las denominaciones *imagen* y *preimagen*, que se reservan para años superiores.
En el **problema 8**, los **ítems a.** y **b.** también promueven la lectura de valores de las variables. Los **ítems c.** y **d.** avanzan en la elaboración de inferencias que remiten a respuestas que incluyen valores únicos y valores en términos de intervalos, y también a la elaboración de preguntas. Tal como se explicita en el Anexo teórico, resultaría de interés que el docente incorporara preguntas que no pudieran contestarse a partir de la gráfica (por ejemplo, ¿cuánto tiempo estuvo detenido el auto?) y que solicitara a los alumnos la formulación de otras.
El **problema 10** propicia la articulación entre dos formas de representación: lenguaje natural y gráfica cartesiana, a fin de determinar la gráfica adecuada. Para ello es necesario partir de la lectura de variables representadas (distancia y tiempo) y realizar inferencias acerca de variables no representadas (velocidad).
Para resolver el **problema 11** también es necesario transformar la información directa para responder a preguntas acerca de variables no representadas, en este caso, aumento de sueldo. El problema permite realizar una interpretación intuitiva de intervalos de crecimiento en un determinado proceso y comparar intervalos de crecimiento de procesos diferentes.
Cabe señalar que se ha seleccionado trabajar, fundamentalmente, a partir de la presentación de gráficos ya construidos, y sólo se solicita la construcción de gráficas muy sencillas en situaciones que apuntan a resaltar el rol de la gráfica como instrumento eficaz para resolver problemas como el **12**. Asimismo, es im-

portante destacar que todas las actividades propuestas han sido pensadas para ser resueltas sin apelar a definiciones formales de la noción de función.

Segunda secuencia: Funciones y proporcionalidad

Si bien los alumnos han resuelto anteriormente situaciones de proporcionalidad tanto en años anteriores como durante este año (T. P. N° 3 y 6 de esta carpeta), éstas se han caracterizado por su naturaleza aritmética. En este trabajo práctico se intenta avanzar sobre el tratamiento de la misma proporcionalidad promoviendo su aspecto funcional. Para ello, se proponen los **problemas 15** y **16** que promueven la articulación de diferentes formas de representación: gráfico-tabla, gráfico-fórmula y tabla-fórmula, y facilitan el análisis y la identificación de situaciones que pueden modelizarse mediante funciones de proporcionalidad directa y otras mediante situaciones de proporcionalidad inversa. En estos problemas se incluyen situaciones que no permiten ser trabajadas mediante ningún modelo proporcional, lo que propicia el establecimiento de los límites de ese modelo. En este apartado se solicita la elaboración de fórmulas, como en el **problema 16b.**

Tercera secuencia: Gráficos estadísticos

Para abordar el tratamiento de datos estadísticos, se ha elegido presentar gráficos de barras, diagramas de sectores y tablas, con la finalidad de que los alumnos interpreten la información que comunican. Del mismo modo, para que los alumnos identifiquen la representación que más se adecua a la información que se desea comunicar, también se solicita la construcción de gráficos, en el **problema 20**. Así, se intenta promover el análisis crítico de la información que llega a diario. Se ha incluido información de diferente naturaleza: datos cualitativos (en el **problema 19,** los tipos de agua) y cuantitativos continuos y discretos (en el **problema 18,** el costo de vida es una variable continua), reservando para años posteriores la identificación de representaciones adecuadas a los datos en cuestión.

Respuestas y soluciones

T. P. Nº 1 | Números naturales y enteros y sus operaciones

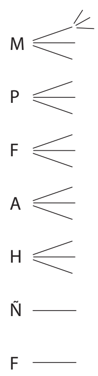
1. a. Tal vez, los problemas propuestos por los chicos involucren una única operación y palabras clave.
b y c.

	Tema	¿La respuesta es única?	¿Se usan todos los números?	¿Son suficientes los datos?	¿Se usan palabras clave?
P4	DINERO	Sí	No	Sí	Sí: falta
P5	EDADES	Sí	Sí	Sí	Sí: más, menos
P6	DINERO	No	No	Sí*	No
P7	PERÍMETRO	No	Sí	No	No
P8	NÚMEROS	Sí	Sí	Sí	Sí: dividir

P4: 25.000 – 23.200 = 1800. P5: edad de Martín = 6 + 5 = 11. Hermano de Martín = 11 + 6 = 17. P6: 200 – 120 = 80. Ana gastó al menos 80 pesos en libros, pero pudo haber gastado más. P7: Si la habitación tiene 2 m de ancho se necesitan 6 metros de alfombra, y en ese caso tendría 16 metros de perímetro. Los chicos podrían esquematizar la situación proponiendo distintos “modelos” de habitación con los datos del problema. P8: Sí, el número buscado es 224 = 25 x 8 + + 24. Sí, dividiendo por 3 queda: 25 = 3 x 8 + 1.
d. Una puesta en común en el pizarrón puede permitir la reflexión sobre lo realizado, la conveniencia o no de hacer esquemas o dibujos, detectar datos necesarios, revisar la coherencia de datos y resultados, de las unidades de medida, etcétera.

2. Hay 7 platos diferentes, de los cuales 2 no llevan guarnición (ñoquis con salsa y fideos con manteca) y 5 sí. También hay 3 guarniciones y 4 postres: [(5 x 3) + 2] x 4 = 68.

3. a. La opción del diagrama de árbol permite escribir menos, con la seguridad de “listar” todas las alternativas.
b.



4. Hay 4 alternativas para las centenas, 3 para las decenas y 2 para las unidades: 24 números posibles. Un diagrama de árbol puede ayudar.

5. a. Si se incluyen dos postres, (5 x 3 + 2) x 6 = = 102 menús.
Si se incluyen dos platos nuevos de carne, (7 x 3 + 2) x 4 = 92 menús.
Si se incluyen 2 platos de pasta, (5 x 3 + 4) x x 4 = 76 menús.
b. Primer caso: 4 x 4 x 4 = 64.
Segundo caso: 5 x 5 x 5 = 125.
c. Llamemos p a esa cantidad fija: debe ser p · p · p un número que cubra los días del calendario escolar. Si p es 5, no cubre (p^3 = 125), si p es 6 (p^3 = 216), se excede.

6. b. Caso 1: 4^3. Caso 2: 5^3.
c. 6^3

7. ¿Cuánto ahorra Ana cada día?

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$ Total	1	3	7	15	31	63	127	255	

Si ahorra 8 días: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + + 64 + 128 = 255.
Si ahorra 9 días: 255 + 256 = 511. Debe ahorrar 9 días.

8. Episodio 1

MINUTOS	USUARIOS
5	10
10	10^2
15	10^3
20	10^4
25	10^5
30	10^6

Son 10^4 infectados.
Te lleva 15 minutos.

MINUTOS	USUARIOS
5	3125
4	625
3	125
2	25
1	5

¡Son 5 contagios por minuto!

9. a. 7º grado: 44.
b. 8º grado: Sí, se forman 13 grupos y sobran 5 alumnos, que duermen en otra carpa.
c. 9º grado: La situación puede describirse de la siguiente manera: el número de chicos por carpa, por la cantidad de carpas más 3, debe ser mayor que 40 y menor que 50. Son 6 carpas, porque 40 < 7 x 6 + 3 < 50.

10. a. 44 |5 ; 4 8   44 |8 ; 4 5
b. 83 |6 ; 5 13   c. 45 |7 ; 3 6

11. a. ▪ 67 |d ; R 23

67 = d · 23 + R. No hay números naturales que satisfagan la condición.

▪ 62 |d ; 6 c

62 = d · c + 6. Basta que d · c = 56. Existen 8 posibilidades: 7 x 8, 14 x 4, 28 x 2, 1 x 56 y los cuatro productos conmutados.

▪ D |32 ; 7 c

D = 32 · c + 7. Cada valor de c natural permite obtener un valor de D que verifica la igualdad. Existen infinitas posibilidades.

▪ D |d ; 7 32

D = 32 · d + 7, con d > 7. Hay infinitas posibilidades para D y d.

▪ D |7 ; R 14

D = 7 · 14 + R, con R < 7. Existen 7 posibles pares que verifican las condiciones.
Al hacer la puesta en común, se puede organizar una tabla con los posibles valores para cada problema.
b. Se observa que, en todos los casos en los que hay solución, hay más de una, porque aquí deben determinarse dos números y hay una relación entre ellos.

12. a. Un esquema puede ayudar. Esteban se da cuenta de que debe multiplicar 27 x 25 x 40 y asocia de la manera más conveniente: 25 x 40 = 1000 y, luego, 1000 x 27 = 27000
b.

ALTURA CAJA 1	ALTURA CAJA 2
10	30
11	29
12	28
13	27
14	26
15	25
16	24
17	23
18	22
19	21
20	20

c. En cada fila, puede verificarse la capacidad de las cajas.
Trabajando con la fila 1, en la caja 1 entran 27 x 25 x 10 = 6750. En la caja 2, entran 27 x 25 x 29 = 20 · 250.
Cubos totales: 27 x 25 x (10 + 29) = 27.000.

13. Puede justificarse mediante la asociatividad de la multiplicación y la distributividad de la multiplicación respecto de la suma.

14. Sí, 321 x 15 = 321 x (10 + 5) = 321 x 10 + + 321 x 5 = 3210 + 1605 = 4815, siendo 1605 la mitad de 3210.
Generalizando: n · 15 = n · (10 + 5) = = n · 10 + n · 10 : 2.
Puede justificarse mediante la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

15. Se sugiere empezar con algunos ejemplos numéricos:

N	N²	N X (N + 1)	N + N²
2	4	2 X 3 = 6	2 + 4 = 6
3	9	3 X 4 = 12	3 + 9 = 12
4	16	4 X 5 = 20	4 + 16 = 20

Algunos alumnos pueden decir que el resultado da igual que el número más su cuadrado y luego escribir la expresión general que puede probarse: $n \cdot (n + 1) = n^2 + n$, por propiedad distributiva.

16. Un dibujo puede ayudar a visualizar el perímetro que queremos cercar:
2 x (6 + 10). (Hay que tener en cuenta que debe dejarse 1 metro alrededor de la pileta).
a y b. Conviene comprar los módulos de 3 metros para el ancho en los que el metro cuesta menos de $9. Para el ancho, si se colocan las dos puertas allí, quedan dos tramos de 9 m, con 3 puertas cada uno.
c. Una consideración importante es la elección del lugar en el que colocamos la puerta. Si la cerca fuese de 4 por 4, ¿la decisión sería la misma?
d. Aunque se eligieran más cantidad de módulos de 2 metros que la conveniente, no se gastarían más de 320 pesos, aunque olvidemos la puerta.
Necesitaríamos lo siguiente: en el ancho, 3 módulos de 2 para cada lado: 6 x 20 = 120; en el largo, 5 módulos de 2 para cada lado: 10 x 20 = 200. Total: 320 pesos como máximo.
El problema anterior no pregunta acerca del gasto necesario para la cerca ni sobre la cantidad de módulos necesarios. Sin embargo, la investigación de las distintas alternativas y sus ventajas puede llevar a los chicos a encontrar también estas respuestas.

17. a. Ganancia del ayudante: $150; del plomero: $160; entre los dos: $310.
b. Si el plomero trabaja 4 horas, coincide con el caso anterior; si trabaja 8, gana $570.
c.

HORAS P	HORAS A	GANANCIA P	GANANCIA A
0	2	0	50
1	3	40	75
2	4	80	100
3	5	120	125
4	6	160	150

Debe trabajar, al menos, 4 horas.
d. Siendo p el número de horas trabajadas por el plomero, el ayudante trabajará p + 2 horas.
p · 40 + (p + 2) · 25 = 310
p · (40 + 25) + 50 = 310
Luego, 65 · p = 310 – 50. Entonces, p = 260 : : 65 = 4, por lo que p + 2 = 6.
El plomero trabajó 4 horas y el ayudante, 6 horas.

18. Es posible que en el aula convivan distintos tipos de calculadora. Las más antiguas no trabajan con los paréntesis. Por eso, para la resolución de muchas de las expresiones, debe recurrirse a la memoria suma. Es conveniente asesorarse respecto del uso de los distintos modelos antes de trabajar en el aula.
a.
- $20 \cdot m_2 + 25 \cdot m_3$ (siendo m_2 la cantidad de módulos de 2 metros y m_3, la cantidad de módulos de 3 metros).
- 40 · p + 25 · (p + 2) (siendo p la cantidad de horas trabajadas por el plomero).
- 40 · (a – 2) = 40 · a – 80 (siendo a la cantidad de horas trabajadas por el ayudante).

En todos los casos, ambos miembros pueden ser resueltos mediante la calculadora.
b. En el pizarrón, se podrán analizar las diferentes expresiones, identificando las correctas y las propiedades que permiten relacionar las expresiones equivalentes.
c.
- x · 40 + x + 2 · 25

Es necesaria la memoria suma.
No representa ninguna opción de a.

- 65 · x + 50

Puede resolverse con calculadora en el orden presentado.
Corresponde a lo obtenido en horas trabajadas donde x son las del plomero.

- (x + 2) · 25 + 40 · x

Requiere el uso de la memoria.
Corresponde a la expresión de las horas trabajadas

- x · 25 + y · 20

Requiere el uso de la memoria.
Corresponde a la expresión de los módulos de la pileta.

- (x + y) · 45

Puede resolverse con la calculadora en el orden dado.
No representa ninguna opción de a.

19. Ver las distintas alternativas en el desarrollo del ítem a. del problema 18.

20. a. $2 \times 3^2 < 3 \times 2^3$
b. 3 · n : 2 > 2 · n : 3
c. $3 \times 3 < 3^3$
d. $33^3 > 3^{3 \times 3}$
e. $\sqrt{36} > \sqrt[3]{64}$

21. a. 1200 + 144 = 1344.
b. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.
c. 24 x 44 = 24 x (50 – 6) = 24 x 50 – 24 x 6, pero no es la única.

22. a y b. 2 x 25 x 83 = 2 x 2075 = 4150 (por asociatividad de la multiplicación).
2 x 25 x 3 x 83 = 6 x 2075 = 12.450 (por asociatividad y conmutatividad de la multiplicación).

23. a. (46 : 2) x (2 x 18) = 46 x 18 = 488
b. [(46 x 18) : 2] x 2 = 488

24.
- 37.400 : 17 = (374 x 100) : 17 = = 374 : 17 x 100 = 22 x 100 = 2200
- 374 : 22 = 17 (pues 374 : 17 = 22, entonces, 374 = 17 x 22 = 22 x 17 por conmutativa, entonces, 17 es el cociente al dividir 374 : 22).
- 374 : 34 = 374 : (2 x 17) = 374 : 17 : 2 = 11 (por conmutatividad en el producto y asociatividad de la división).
- 374 : 11 = 374 : (22 : 2) = 374 x (2 : 22) = = (374 : 22) x 2 = 17 x 2 = 34

25. $89 : 7 = 12{,}\overline{714285}$. Sabemos que 89 = 12 x 7 + R, de modo que 89 = 84 + R, de donde R = 5. También puede calcularse así: R = (2,714285 – 2) x 7.

26. a. Realizo sumas: 43 + 43 + … + 43 (23 veces 43 resultan 989). La suma 24 veces 43 es mayor que 1000. 374 : 17 = 22
b. 43 x 10, 43 x 20, 43 x 30, 43 x b, donde b está entre 20 y 30.
c. Se restará de 1000 el número 43. Como las restas pueden efectuarse 23 veces, el cociente entero es 23.

27. a y b.
- Se sabe que 6284 = 46 · c + R. Si el cociente fuera de dos cifras: 10 < c < 100; 460 ≤ ≤ 46 · c ≤ 4600, por lo que R debería ser mayor que 46. Si c fuera de tres cifras: 100 ≤ c ≤ ≤ 1000, entonces, 4600 ≤ 46 · c ≤ 46000, lo cual permite encontrar valor para R. Si c fuera de 4 cifras: 1000 ≤ c ≤ 10000, o sea, 46000 ≤ 46 · c ≤ 460000, lo cual no es posible siendo 46 · c ≤ 6284. El cociente es de tres cifras.
- El cociente es de dos cifras.
- Es de dos cifras.

28. Para que queden 6 parejas finalistas, ¿al menos cuántas parejas del segundo club debieron inscribirse? ¿Cuál pudo ser el método de eliminación elegido? Pudo haberse asignado 1 punto por partido ganado y 0, por partido perdido y ser finalistas las 6 parejas de mejor puntaje, o bien aceptarse a aquellas que hayan ganado al menos 3 partidos. Este ejercicio abre un juego en el que las reglas deben pautarse previamente.
Supongamos que se inscriben 4 parejas del segundo club y éstos son los resultados de la primera ronda para las 8 parejas participantes:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	PUNTAJE TOTAL
P1	–	1	1	1	0	0	1	1	5
P2	0	–	0	0	1	1	0	0	2
P3	0	1	–	0	1	1	1	0	4
P4	0	1	1	–	1	1	1	0	5
P5	1	0	0	0	–	0	1	1	3
P6	1	0	0	0	1	–	0	1	3
P7	0	1	0	0	0	1	–	1	3
P8	0	1	1	1	0	0	0	–	3

¿Puede haberse usado como criterio de selección los mejores puntajes y que sean 6 los finalistas? En este caso, ¿qué criterio se pudo haber utilizado? ¿Puede haberse dado otra situación entre las parejas que permita el uso de ese criterio?
Se sugiere proponer a los chicos la confección de una tabla.

29. a. Los sistemas aditivos están representados en la mano y las barras, de modo que cada dedo, o barra, representa la unidad. Si bien reconocemos en el símbolo V el 5 en el sistema romano, su expresión no permite establecer que pertenezca a un sistema aditivo.
b. Se sugiere después de la lectura realizar un debate sobre las frases producidas por los alumnos.

30. a. 2 · p · 3 · q = 6 · 8124 = 48744
b. Por propiedades asociativa y conmutativa del producto.
c. q · (p + 1) = q · p + q. No es posible el cálculo, pues no se conoce q.
Como la descomposición en dos factores p y q no es única (sí es única la descomposición en factores primos), no podemos asegurar los valores de p y q para obtener el producto pedido.

31. Se sugiere, en este caso, releer las conclusiones del problema 1 y volver sobre su propuesta.

32. Debe ser 46 = d · 13 + 1. Si tomamos d = 3, entonces, 3 x 13 + 1 < 46, con d = 4; entonces, 4 x 13 + 1 > 46. No es posible la división propuesta.

33. Este ejercicio brinda una excelente oportunidad para hacer una revisión de las propiedades de cada operación, las ventajas de su utilización y sus características.

34. a. Multiplicación egipcia:
Se expresa uno de los factores como suma de potencias de 2. En el ejemplo: 13 = 8 + + 4 + 1, entonces, 76 x 13 = 76 x (8 + 4 + 1)
76 x 13 = 76 x 8 + 76 x 4 + 76
76 x 13 = 988
La propiedad distributiva justifica el procedimiento.
b. Multiplicación rusa:
Primer caso: se observa que las filas de la tabla presentan productos constantes dado que, mientras que en una columna se divide por 2, en la otra se multiplica por 2. Así, cuando en la columna de la izquierda llegamos al 1, en la derecha debe encontrarse el resultado del producto buscado.
Segundo caso: vuelve a buscarse que el producto entre elementos de una fila sea constante. En este caso, para lograr esa igualdad, debe tenerse en cuenta el resto en la división por 2 (que es 0 ó 1).
Mirando la primera fila de la tabla: 45 x 5 = = (44 + 1) x · 5 = 44 x 5 + 5.
Dado que al dividir sólo se tiene en cuenta el 44, en la columna de la derecha debe sumarse 5 para mantener el resultado buscado.
Con el mismo razonamiento se establecen las filas siguientes.

T.P. Nº 2 | Números naturales: divisibilidad y regularidades

1. Para responder a los ítem **a.** y **b.**, hay más de una posibilidad, pero en todas se obtiene el mismo resultado.
Por ejemplo:
a. 14 x 12 x 5 x 20 = 16.800
b. 21 x 20 x 4 x 10 = 16.800
Los productos calculados pueden expresarse
(2 x 7) x (3 x 4) x 5 x (5 x 4) = 16.800
(7 x 3) x (4 x 5) x 4 x (5 x 2) = 16.800
c. Los productos coincidentes se puede verificar aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación.
d. Los números de la cuarta columna se obtuvieron multiplicando los de la tercera por 5; los de la primera, multiplicando los de la tercera por 7; los de la segunda, multiplicando los de la tercera por 4. Al tomar un elemento de cada fila y columna, el producto obtenido resulta de multiplicar los factores 2, 4, 3 y 5 por los factores 7, 4 y 5 en todos los casos.

2. a. Cabinas en km: 12 – 24 – 36 – 48 – 60 – – 72 – 84 – 96 – 108 – 120 – 132 – 144.
Puestos sanitarios en km: 30 – 60 – 90 – – 120 – 150 – 180.
Estaciones de servicio en km: 15 – 30 – 45 – – 60 – 75 – 90 – 105 – 120.
Vuelven a coincidir en el km 60.
b. Sí, porque coinciden cada 60 km.
c. Son múltiplos de 12, 15 y 30; entonces, son múltiplos de 60.
Es conveniente que los alumnos realicen un esquema.

3. a. La distancia entre dos señales consecutivas entre Laguna y Salto II puede ser 1 – 2 – – 3 – 5 – 6 – 10 – 15 – 30; entre Salto II y Riosol, puede ser 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 12 –16 – – 24 – 48. Para que la distancia sea siempre la misma y la mayor posible, será de 6 km.
b. Se colocará una señal en la ciudades de Laguna, una en la de Salto II y 4 entre ambas; se colocará una señal en Riosol y 7 entre Salto II y Riosol. En total, 14 señales.

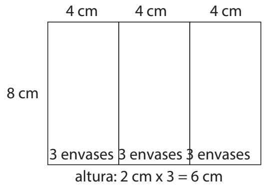
4. Se pueden armar 3 bolsitas.

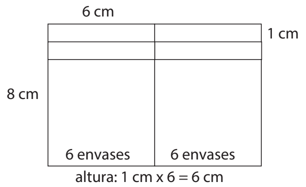
BOLSITAS	CHUPETINES	GALLETITAS	CARAMELOS
2	30	NO SE PUEDE	60
3	20	25	40
4	15	NO SE PUEDE	30
5	12	15	24

5. El número de bolitas es múltiplo de 5, mayor que 70 y menor que 100. Por lo tanto, un procedimiento puede ser analizar cada cantidad: 75 no, por ser múltiplo de 3; 80 y 90 no, por ser múltiplos de 2. Sólo 95 cumple las condiciones.

6. Procedimiento 1: volumen envase A: 64 cm^3; 4 envases: 256 cm^3. Volumen envase B: 36 cm^3; 4 envases: 144 cm^3. Menor múltiplo común: 2304. Una caja de 12 cm x 12 cm x x 16 cm tendrá un volumen de 2304 cm^3 y contendrá 36 envases A y 64 B.

Procedimiento 2: realizar distintos esquemas. Por ejemplo, una caja de 8 cm x 12 cm x 6 cm contendrá 9 envases de tipo A y 16 envases de tipo B. Volumen: 576 cm³.





Se hará notar a los alumnos que se pide que la caja contenga al menos cuatro envases de tipo A o de tipo B, sin señalar un máximo.

7. 63 y 54 son múltiplos de 3, pues 63 = 3 x 21 y 54 = 3 x 18.
63 + 54 = 117 = 3 x 39 (es múltiplo de 3)
63 – 54 = 9 = 3 x 3 (es múltiplo de 3)
Se sugiere trabajar la justificación aplicando las propiedades de las operaciones de números naturales.

8. Ejemplos: 21 – 14 = 7 x 3 – 7 x 2 = 7 x (3 – 2) = = 7; 70 – 63 = 7 x 10 – 7 x 9 = 7 x (10 – 9) = 7.
Generalizando: 7n y 7(n + 1) son dos múltiplos de 7 consecutivos. Su diferencia es 7(n + 1) – 7n = 7n +7 – 7n = 7, por propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de naturales, para cualquier n natural.
Análogamente, la diferencia entre dos múltiplos consecutivos de 37 es 37 y entre dos múltiplos consecutivos de 183 es 183.

9.

	360	451	492	500	670	782	810	895	900	1000	1453
2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
3	0	1	0	2	1	2	0	1	0	1	1
5	0	1	2	0	0	2	0	0	0	0	3
7	3	3	2	3	5	5	5	6	4	6	4
10	0	1	2	0	0	2	0	5	0	0	3

10. El número es 4.935.782. Es único.
Un procedimiento posible consiste en listar todos los múltiplos de 17 de tres cifras; desde 017 hasta 986. Comenzando por el primero de tres cifras, buscar en la lista otro que tenga en la cifra de las centenas y las decenas los números que el primero tiene como decenas y unidades, respectivamente, y así sucesivamente. El primer múltiplo de 17 de 3 cifras es 102; como agrupados de a 3 deben ser múltiplos de 17, la cifra siguiente debe ser tal que 02… sea múltiplo de 17. ¿Es posible? No lo es; entonces, se sigue con 119, que también se excluye por tener cifras repetidas. El siguiente en la lista es 136; se busca, entonces, un número múltiplo de 17 que empiece con 36…; al no encontrar ninguno, se empieza nuevamente con el siguiente múltiplo de 17.

11. Se examinarán frenos de los vehículos 6 – 12 – 18 – 24 – 30 – 36. Documentación de los vehículos 10 – 20 – 30 – 40 – 50. Luces de los vehículos 15 – 30 – 45 – 60. Por lo tanto, se examinarán 29 más y al 30 se le realizará una verificación completa.

12. Una primera aproximación, para avanzar con conjeturas que permitan la generalización de las respuestas, consiste en utilizar ejemplos numéricos. Luego, se sugiere intentar expresar en lenguaje coloquial aquellas afirmaciones que permiten acercarse a la demostración.
a. Ejemplo: el divisor más pequeño de 8 es 1 y el mayor es 8; para cualquier número natural, el menor divisor es 1 y el mayor es el mismo número. Todo número natural se puede dividir exactamente por 1 y por sí mismo. Puede expresarse como n = 1 · n.
b. Ejemplo: 3 es divisor de 9 y de sus múltiplos; entre otros, de 27, 54, 81…
Justificación: si a es divisor de b, entonces, b = na, siendo n un número natural; si b es divisor de c, entonces, c = kb, siendo k un número natural; reemplazando b por na, resulta c = k (na); por propiedad asociativa de la multiplicación de naturales, c = (kn) a; como kn es otro número natural, resulta que c es múltiplo de a, entonces, a|c.
c. Para todo número natural n, su menor múltiplo es n si se considera que el 0 no pertenece a N. No se puede determinar el mayor.
d. 144 es múltiplo de 12; 48 es múltiplo de 12; 144 + 48 = 192 y 192 es múltiplo de 12.
Justificación: si a|b, entonces, b = na. Si a|c, entonces, c = pa. La suma de b y c resulta b + c = na + pa; entonces, b + c = (n + p) a por propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en números naturales. Entonces, a|(b + c).

13. a. Son los números primos. Ejemplos: 2, 3, 5, 13, 17.
b. A veces, es un número primo. 17 es primo, 19 es primo y 17 + 19 = 36, que no es primo. Sin embargo, podría ser primo, ya que 2 es primo, 3 es primo y 2 + 3 = 5.
c. No. 3 es primo y 5 es primo, pero 3 x 5 = 15, que no es primo.
El producto de dos números primos admite más de dos divisores; entonces, no es primo.

14. a. Los criterios de divisibilidad más utilizados figuran en la página 12 del Anexo teórico. Esté ítem apunta a recordar algunos criterios para tener algunos elementos que permitan responder el ítem b.
b. Sí. Depende del sistema de numeración. En el sistema romano, no se puede hacer referencia a las cifras ubicadas en el lugar de las unidades, ya que se trata de un sistema no posicional.
En el sistema binario, como los agrupamientos son en base 2, los criterios serán otros.

15. a. y b.
V / F JUSTIFICACIÓN
- Verdadero: Si es divisible por 6, se puede escribir como 2 x 3 x ...; entonces, se puede dividir por 3.
- Falso: 9 es divisible por 3 y no por 6.
- Verdadero: Si es divisible por 3 y por 5, se puede escribir como 3 x 5 x ...; entonces, se puede dividir por 15.
- Falso: 14 es divisible por 7 y por 2.
- Falso: 6 no es divisible por 4, pero si por 2.
- Verdadero: Si un número es divisible por 16, se puede escribir como 2 x 2 x 2 x 2 x ..., o bien como 4 x 4 x ..., o como 8 x 2 x ...; entonces, se puede dividir por 4 y por 8.

16. Un procedimiento posible consiste en considerar que si el número de chanchos fuera múltiplo de 5, 6, 9 y 11, sería 990, que es el único multiplo común menor que 1000. Siendo 1 el resto de dividir el número de chanchos por 5, 6, 9 y 11, se suma 1 al valor obtenido. Son 991 chanchos.

17. SÍ / NO UNA EXPLICACIÓN
- Sí: El doble de un múltiplo de 7 es múltiplo de 7.
- Sí: El triple de un múltiplo de 7 es múltiplo de 7.
- Sí: Cualquier múltiplo de 7 es múltiplo de 7.
- No: La mitad de 21 no es múltiplo de 7.
- Sí: Es 7 y todo número es múltiplo de sí mismo.

18. La medida de la longitud del segmento CD es un múltiplo de 5 y la medida de la longitud del segmento MN es un múltiplo de un múltiplo de 5; entonces, es también múltiplo de 5. (Se demostró en el ítem b. del problema 12).

19. a. ■ 1, 2, 4 , 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
■ 2, 20, 200, 2000, 20000, 200000, 2000000, 20000000
■ 5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3645, 10935, 32805
b.

n	a_n	b_n	c_n
• ••1	2^0	2	5
••2	2^1	2 x 10	5 x 3
••3	2^2	2×10^2	5×3^2
•...	...	...	...
100	2^{99}	2×10^{99}	5×3^{99}

20. Se puede solicitar que cada alumno escriba en hoja aparte la regla que define su sucesión para confrontar su trabajo con el del compañero que tuvo la tarea de descubrirla. En otro momento, puede resultar interesante la discusión sobre distintas maneras de expresar una misma regla.

21. a. En los lugares impares, hay fichas blancas y, en los pares, hay fichas negras. Lugar 415, B; lugar 20.000, N.
b. En los lugares múltiplos de 3 y no de 6, hay fichas celestes; en los lugares múltiplos de 6, hay fichas grises; en los lugares que no son múltiplos de 3, hay fichas blancas. Lugar 27, C; lugar 41, B; lugar 54, G.
c. En los lugares cuya cifra de las unidades es 3, 6 ó 9, hay fichas celestes; en los lugares múltiplos de 5, hay fichas grises; en los lugares cuya cifra de las unidades es 1, 2, 4, 7 u 8, hay fichas blancas. Lugar 32, B; lugar 45, G.

22. a. El tercer amigo cambia las fichas de cuatro en cuatro empezando por la cuarta; el cuarto amigo cambia las fichas de cinco en cinco empezando por la quinta y así sucesivamente.
Se puede anticipar el color de las 10 primeras fichas después de que pasen los 10 primeros amigos; de las 15 primeras fichas, después de que pasen los primeros 15 amigos y así sucesivamente.
b. La secuencia es 3N; 5B; 7N; 9B; 11N; 13B; 15N; 17B; 19N; 21B; 5N y se llega a las 125 fichas
●●●○○○○○●●●●●●●○○○○○○○○○
Si se suman las cantidades correspondientes a fichas blancas, resulta
5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 65.
Se puede observar en la secuencia que las fichas blancas son la 4º; 5º, 6º, 7º, 8º, es decir, 5 fichas a partir de la cuarta, también, las fichas 16º, 17º, 18º, 19º, 20º, 21º, 22º, 23º, 24º, es decir, 9 fichas a partir de la decimosexta. A partir de la ficha 36º, hay otras 13 fichas blancas.
c. Los lugares de la forma $(2n)^2$, con n = 1, 2, 3, 4, 5..., son fichas blancas.

23. b. Se observa en el calendario que cada número se obtiene sumando 7 al que se encuentra arriba de él. Siempre ocurre lo mismo, porque transcurrieron los 7 días de una semana.
c. 11 + 19 = 12 + 18 se puede expresar como 11 + (11 + 1 + 7) = (11 + 1) + (11 + 7).
Generalizando, se comprueba que
n + (n + 1 + 7) = (n + 1) + (n + 7) por la propiedad conmutativa y la asociativa de la adición de números naturales.

n	n + 1
n + 7	n + 1 + 7

d. Si la línea es horizontal, resulta 11 + 13 = = 2 x 12. Generalizando, n + (n + 2) = 2 (n + + 1) por la propiedad asociativa de la adición y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números naturales.

n	n + 1	n + 2

Si la línea es vertical, (n – 7) + (n + 7) = 2 · n.

n – 7
n
n + 7

24. Llamamos h a la edad de la hermana; m, a la edad de la madre y M, a la edad de Margarita. h = M + 6; M = m – 27.
La información no es suficiente para dar la respuesta; si Margarita tuviera 55, su hermana tendría 61 y su madre, 82. Del mismo modo, si Margarita tuviera 57, su hermana tendría 63 y su madre, 84.

25. a.

Triángulos	Palillos
2	5
5	11
7	15
300	601

b. El número de palillos es igual al doble del número de triángulos aumentado en 1. La cantidad de triángulos es la mitad del número de palillos disminuida en 1.
c. El intercambio de las formulaciones elaboradas en el ítem **b.** permite avanzar con acuerdos que lleven a algunas expreciones de tipo algebraico.
d. p = 2n + 1, siendo p el número de palillos y n, el número de triángulos; p = 3 + 2(n – 1) p = n + (n + 1).

26. Episodio 2

Nro. DE MÁQUINAS	CABLE TELEFÓNICO	FIBRA ÓPTICA
4	4	2
6	6	9
9	9	27
20	20	170
n	n	n(n – 3) / 2

Si se imaginan las máquinas como los vértices de un polígono, los tramos de cable telefónico serían los lados de dicho polígono y la fibra óptica sería las diagonales.

27. a.

MÚLTIPLO DE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
•1	x														
•2	x	x													
•3	x		x												
•4	x	x		x											
•5	x				x										
•6	x	x	x			x									
•7	x						x								
•8	x	x		x				x							
•9	x		x						x						
10	x	x			x					x					
11	x										x				
12	x	x	x	x	x	x						x			
13	x												x		
14	x	x					x							x	
15	x		x		x										x

b. En la columna del 2, las cruces están en celdas que corresponden a filas que son múltiplos de 2. Del mismo modo, para 3 y para 7.
c. En la fila 12, las cruces están en celdas que corresponden a columnas de divisores de 12.
d. Si en una fila hay dos cruces, el número correspondiente a ella es primo.
e. Hay cruces en todas las celdas, porque todo número es múltiplo de sí mismo.

28. ■ Falso.
■ Verdadero.
■ Verdadero.
■ Verdadero.

29. a. No. D = 11 c + 5, siendo D el dividendo y c, el cociente.
b. Sumarle 6 porque, si al dividir D por 11, sobra 5, entonces, D – 5 es múltiplo de 11. El múltiplo de 11 siguiente se obtiene sumando 11, es decir, D – 5 + 11, o sea que el siguiente múltiplo de 11 es D + 6.
c. Restarle 5 porque, si al dividir D por 11, sobra 5, entonces, D – 5 es múltiplo de 11.

30. Los divisores de a son 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84. Los divisores de b son 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

31. a. Procedimiento 1: Listar los divisores de cada uno de los números. Buscar el divisor común mayor. Divisores de 70: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70. Divisores de 90: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90. mcd (70, 90) = 10.
Procedimiento 2: Escribir la descomposición factorial de cada uno de los números. Seleccionar los factores que aparezcan en todas las descomposiciones (si se repiten, marcar todas las veces posibles).
70 = 2 x 5 x 7
90 = 2 x 3 x 3 x 5
mcd (70, 90) = 2 x 5 = 10
Análogamente, para los restantes.
mcd (15, 40) = 5
mcd (25, 60, 90) = 5
mcd (24, 30, 36) = 6
b. mcd (a, b, c) = 5 puede ser a = 20, b = 25 y c = 30.
c. Procedimiento 1: Listar los múltiplos de cada uno de los números. Buscar el múltiplo común menor.
Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84.
Múltiplos de 14: 14, 28, 42, 56, 70, 84.
mcm (12,14) = 84.
Procedimiento 2: Escribir la descomposición factorial de cada uno de los números. Seleccionar los factores repetidos y los no repetidos que aparezcan en alguna de las descomposiciones.
12 = 2 x 2 x 3
14 = 2 x 7
mcm (12, 14) = 2 x 2 x 3 x 7 = 84.
Análogamente,
mcm (100, 25, 40) = 200
mcm (20, 75) = 300
mcm (8, 12, 20) = 120

32. Si es divisible por 4 y por 9, es múltiplo de 36. Seleccionar los números que tienen un 3 en el lugar de las decenas y que son múltiplos de 4. Por criterio de divisibilidad, deben terminar en 32 ó 36. Listar los que terminen en 32 ó 36 y sean múltiplos de 9. Por criterio de divisibilidad, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 9. Son 432, 936.

33. Entre otros, 1342, 1243, 4213. La solución no es única. Para justificar, basta con mostrar al menos dos y aplicar el criterio de divisibilidad por 11.

34.

AMIGAS / DÍAS	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
HOY	x	x	x	x	x	x	x
•1	x						
•2	x	x					
•3	x		x				
•4	x	x		x			
•5	x				x		
•6	x	x	x			x	
• 7	x						x
•8	x	x		x			
•9	x		x				
10	x	x			x		
11	x						

a. Si hoy las siete amigas toman juntas el té, dentro de 420, volverán a reunirse todas. mcm (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420.
b. Si se numeran los días en forma consecutiva como muestra la tabla, la abuela preparará té para ella y la primera amiga el día 1 y los días que, en el orden establecido, resulten corresponderse con números primos mayores que 7.

35. a. y b. Los números están escritos como producto de factores. En algunos casos, no se trata de una descomposición factorial, pues no son factores primos y no es única. La descomposición factorial es única.

DESCOMPOSICIÓN DADA	OTRA DESCOMPOSICIÓN NO FACTORIAL	DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL ÚNICA
CORRECTA, NO FACTORIAL	54 = 9 x 6	54 = 2 x 3 x 3 x 3
CORRECTA, FACTORIAL	63 = 3 x 21	63 = 3 x 3 x 7
NO ES CORRECTA	102 = 2 x 51	102 = 2 x 3 x 17
CORRECTA, NO FACTORIAL	24 = 2 x 2 x 6	24 = 2 x 2 x 2 x 3

36. La solución no es única: pueden ser 6 perros y 4 gatos ó 1 perro y 10 gatos. La situación responde a la fórmula 6p + 5g = 56, siendo p y g números naturales: p, número de perros y g, número de gatos. Se sugiere analizar la situación a partir de distintos ejemplos numéricos intentando avanzar sobre alguna formulación general.

37. a. El número de vueltas deberá ser múltiplo de 4; cada 4 vueltas de la rueda A, la rueda B da una vuelta completa.
b. La cuarta parte del número de vueltas de A.

38. b. 11111 x 11111= 123454321;
111111 x 111111 = 12345654321
c. 1111111 x 1111111= 1234567654321;
11111111 x 11111111 = 123456787654321
Justificación: 11111 x 11111 =
= 11111 x 10000 + 11111 x 1000 +
+ 11111 x 100 + 11111 x 10 + 11111 =
= 111110000 + 11111000 +1111100 +
+ 1111110 + 11111 = 123454321
En forma análoga, se pueden calcular los demás productos.

39. 2n + 1, siendo n cero o cualquier número natural, o 2n – 1, siendo n un número natural.

40. a.
- par + par = 2n + 2m = 2(n + m) = 2p = par
- par + impar = 2n + 2 m + 1 = 2 (n + m) + + 1 = 2p + 1 = impar
- impar + impar = 2n + 1 + 2m + 1 = 2(n + m) + + 2 = 2 (n + m +1) = 2p = par
- par · par = 2n · 2m = 2 (2n · m) = 2p = par
- par · impar = 2n · (2m + 1) = 2(2nm) + + 2n = 2(2nm + n) = 2p = par
- impar · impar = (2n + 1) (2m + 1) = 2n · · 2m + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1 = = 2p + 1 = impar

En todos los casos, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en el conjunto de los números naturales.
b. No figura la opción impar + par porque, por propiedad conmutativa de la adición de naturales, se explica del mismo modo que par + impar. El producto impar · par se explica igual que el producto par · impar.

41. a. 1005
b. 9990
c. 1635
d. 3360

42. a. Si el número pensado es el 7, resulta 7 · 2 + 1 – 7 = 14 + 1 – 7 = 8. Si el número pensado es 12, resulta 12 · 2 + 1 – 12 = 24 + 1 – 12 = 13.
b. Según los ejemplos, el número obtenido es el siguiente del número pensado.
c. Para saber si se cumple siempre, es necesario avanzar en cierta generalización. Se piensa el número natural n: n · 2 + 1 – n = 2n – n + 1 = n + 1, siguiente del número n. Esto puede ser planteado en lenguaje coloquial.

43. Ejemplos: Si se elige el 745, como es mayor que 547, se calcula la diferencia: 745 – 547 = 198, luego se suman 198 y 891, y se obtiene 1089.
Si se elige 319, como 319 es menor que 913, se calcula la diferencia: 913 – 319 = 594, luego se suman 594 y 495, y se obtiene 1089.
Si la cifra de las centenas (c) es mayor que la

cifra de las unidades (u), se resta el número propuesto menos el que resulta de invertir sus cifras. La diferencia entre ambos es un múltiplo de 99. Puede ser 198, 297, 396…, 891. En todos, la cifra de las decenas es 9 y la suma de las cifras de las unidades y centenas también es 9. Al invertir y sumar, resulta 9 la suma de las unidades, 9 la suma de las centenas y 18 la suma de las decenas. Es decir, 9 + 180 + 900 = 1089; análogamente si c < u.

44. a. Triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36…
Cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36...
b. Sí: 1, 36.
c. Es triangular y cuadrado.
d. $\frac{n\,(n+1)}{2}$

T. P. Nº 3 | Números racionales positivos y sus operaciones

1. Le restan pagar $190. Luego, cada cuota será de 190 : 4 = $47,50.

2.

	RELACIÓN ENTRE PARTE SOMBREADA Y CUADRADO	RELACIÓN ENTRE PARTE SOMBREADA Y NO SOMBREADA
A	2 de 3	2 a 1
B	5 de 8	5 a 3
C	1 de 6	1 a 5
D	5 de 8	5 a 3

3. Manteca: 150 g + $\frac{1}{2}$de 150 g = 225g.

Harina: 1+ $\frac{1}{2}$= 1 taza y $\frac{1}{2}$

Huevos: 4 + 2 = 6.

Limón: 1 cucharadita y media.

Azúcar: $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} = 1\ \frac{1}{8}$.

4. Al comparar las producciones de los alumnos en una puesta en común, se sugiere tener en cuenta que las fracciones pueden indicar la relación entre partes, el resultado de un reparto, etcétera.

5. En estos ejercicios, es muy importante que esa comparación no dependa de otra unidad que la sugerida. La comparación puede efectuarse con hilos o con marcas y plegado en cintas de papel lisas.

a. N mide 2M; O mide $\frac{3}{2}$M; P mide $\frac{M}{2}$

b. Unidad doble de M: N mide M;

O mide $\frac{3}{4}$M;

P mide $\frac{M}{4}$.

Unidad mitad de M: N mide 4M;

O mide 3M;

P mide M.

c. Unidad doble de N: M mide $\frac{1}{4}$N.

Unidad mitad de N: M = N.

6. Si este ejercicio se utiliza para introducir el tema, probablemente los alumnos hayan propuesto distintos elementos de "medición". ¿Y si usamos la comparación de segmentos mediante la iteración alineada de la unidad?

7. a. La medida del segmento unidad es cuatro veces la del segmento dado.

b. El segmento unidad medirá $\frac{1}{3}$más que el dado. Como el dado representa $\frac{2}{3}$, su mitad representa $\frac{1}{3}$de la unidad.

c. El trabajo, en este caso, requiere cierta aproximación, pues al segmento dado hay que dividirlo en cinco partes, teniendo en cuenta que cada una representa $\frac{1}{4}$de la unidad.

8. a. Tres círculos representarán la unidad.
b. La unidad está representada por dos círculos y $\frac{1}{2}$.

c. La unidad se forma con $\frac{3}{4}$de círculo.

9. a. Si $\frac{2}{5}$ de la unidad son 4 cuadritos, 1 unidad = 10 cuadritos.
b. Análogamente, la unidad será 3 cuadritos.

10. Si hay 3 máquinas cada 2 personas y en total hay 15 máquinas, habrá 10 personas.
Los dos virus son igualmente poderosos, pues $\frac{69}{75} = \frac{25}{25}$.

¿Cuántas personas hay? Se suponía que 11, pero parece haber 12.

11. a. $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$; $\frac{69}{75} = \frac{23}{25}$
b. Caso 1: La cantidad de máquinas por persona es constante. Caso 2: La efectividad de los antivirus es la misma.

12. a. Son fracciones equivalentes.
b. Hay infinitas fracciones equivalentes, multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número natural se tiene:
$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{12}{21}$
c. En este caso, además de multiplicar, como en el ítem b., podemos dividir el numerador y el denominador:
$\frac{15}{45} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

13. El denominador de la fracción, multiplicado por algún n, debe ser potencia de 10.
a. Sí. Es posible, pues 4 x 25 = 100 = 10^2; podemos multiplicar por 25 el numerador y el denominador de la fracción.
b. No. No existe n natural de modo que 3 · n sea potencia de 10.
c. Sí. Es posible multiplicando numerador y denominador por 4.
d. No. Ver el ítem **b.**

14. La fracción debe representar una expresión decimal finita, no periódica, o sea, ítem a. y c. del ejercicio anterior. ¿Cuál es la característica del denominador para que la fracción represente una expresión decimal finita? Siendo D el denominador, debe existir un número natural n, tal que D · n = 10^k, o sea, una potencia de 10. Dado que 10 = 2 x 5, entonces, D · n = $(2 \times 5)^k$, entonces, el denominador debe poder descomponerse sólo en potencias de 2 y/o de 5.

15. a. Fracciones que representan expresiones decimales finitas:
$\frac{2}{5}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{8}{25}$
Fracciones que representan expresiones periódicas:
$\frac{1}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{3}{7}$
b. Ver justificaciones en problemas **14** y **15**.

16. a. Siendo $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $1,\overline{3} = 1 + 0,\overline{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$0,\overline{6} = 0,\overline{3} + 0,\overline{3} = 2 \cdot 0,\overline{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$4,\overline{6} = 4 + 0,\overline{6} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

b. Transformando las expresiones decimales en suma de fracciones.

17. a. P representa $\frac{1}{3}$.

Q representa $\frac{2}{3}$.

R representa 3.

b. P representa $\frac{1}{12}$, pues es el punto medio entre el 0 y $\frac{1}{6}$.

Q representa $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ de unidad a derecha de $\frac{1}{6}$.

R dista de Q: $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} : 2$, o sea, $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} =$

$= \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$; luego, dista del origen $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

18. a. Entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ hay $\frac{1}{3}$ de la unidad. Luego, el 0 está a esa distancia a la izquierda de $\frac{1}{3}$ y el 1 a la misma distancia a la derecha de $\frac{2}{3}$.

b. Entre $\frac{2}{5}$ y 0,6 hay $\frac{1}{5}$ de la unidad. Luego, el 0 está a 2 veces esta medida a la izquierda de $\frac{2}{5}$ y el 1, 2 veces a la derecha del 0,6.

c. Si se divide el segmento de extremos 0,2 y 0,6 en 4 segmentos congruentes, cada uno mide 0,1.
Para ubicar el cero, deberá trasladarse uno de ellos dos veces a la izquierda de 0,2 y, para ubicar el 1, cuatro veces a la derecha de 0,6.
Si se divide el segmento de extremos 0,2 y 0,6 en dos segmentos congruentes, cada uno de ellos mide 0,2.
Para ubicar el cero, deberá trasladarse uno de ellos una vez a la izquierda de 0,2 y, para ubicar el 1, dos veces a la derecha de 0,6.
d. En este caso, hay 0,8 unidades entre ambos. Puede procederse como en c.

19. Es importante que la regla no haya participado en el proceso de resolución.

20. Expresando mediante fracciones equivalentes de denominador 16 y en el orden dado: $\frac{8}{16}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{10}{16}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{16}{16}$, la llave más chica es la de $\frac{3}{16}$ pulgadas, y la más grande es la de 1 pulgada.

21. No. El auto de Ramiro funciona defectuosamente. Debe analizarse si 39 litros cada 300 km es más, o menos, que 12 litros cada 100 km. El auto gasta más de lo esperado, ya que $\frac{39}{100} = \frac{13}{100} > \frac{12}{100}$

22. a. En el pizarrón, 2,432 < 2,54; 0,36 = 0,360; 5,01 < 5,12.

b. Lo que dice Nicolás es incorrecto, pues $2{,}432 = 2 + 0{,}432 = 2 + \frac{432}{1000}$

$2{,}54 = 2 + 0{,}54 = 2 + \frac{540}{1000}$

Siendo 432 < 540, es 2,432 < 2,54.

23. Este ítem puede servir para alentar la búsqueda de la resolución de distintas maneras. Por ejemplo, trabajando con fracciones equivalentes de igual denominador, comparando cifras enteras y decimales o representando en la recta si no tiene muchas cifras decimales.

24. a. Con denominador 5: $\frac{2}{5}$. Con denominador 10: $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$ y $\frac{5}{10}$.

b. Con denominador 5: ninguna. Con denominador 10: $\frac{3}{10}$.

c. ¿Cómo deben ser estas fracciones? Puede suponerse la fracción $\frac{a}{n}$, donde a y n son naturales. Debe verificarse $\frac{1}{5} < \frac{a}{n} < \frac{2}{5}$.

Analicemos las posibilidades:

N	RELACIÓN QUE DEBE VERIFICARSE	VALORES POSIBLES DE a	FRACCIONES BUSCADAS
1	$\frac{1}{5} < \frac{a}{1} < \frac{2}{5}$	Ninguno (con a natural)	Ninguna
2	$\frac{1}{5} < \frac{a}{2} < \frac{2}{5}$	Ninguno	Ninguna
3	$\frac{1}{5} < \frac{a}{3} < \frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{5} < \frac{a}{4} < \frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5} < \frac{a}{5} < \frac{2}{5}$	Ninguno	Ninguna
6	$\frac{1}{5} < \frac{a}{6} < \frac{2}{5}$	2	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
7	$\frac{1}{5} < \frac{a}{7} < \frac{2}{5}$	1; 2	$\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$
8	$\frac{1}{5} < \frac{a}{8} < \frac{2}{5}$	2; 3	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$
9	...	...	...

Con n > 5 siempre encontramos alguna de las fracciones pedidas.
Esta actividad permite analizar que, entre dos racionales, siempre existe otro racional.

25. a. ■ 1,1; 1,2; 1,3; 1,33…
■ 1,01; 1,011; 1,001…
■ 1,001; 1,0011; 1,0012…
b. *Es importante que los alumnos traten de buscar estrategias tales como comparar décimos, centésimos, etcétera. Es una buena oportunidad para entender qué significa que el conjunto de racionales es denso.*

26. a. No. Si 0,236 fuese el siguiente de 0,235, entre ellos no podría haber otro. Sin embargo, entre otros, encontramos el 0,2351: 0,235 < 0,2351< 0,2.
b. No. Porque entre dos números racionales existen infinitos números racionales.

27. a. Esta actividad se enriquece si los alumnos proponen distintas opciones: dos fracciones de distinto denominador, un entero y una fracción, fracciones de igual denominador o decimales.
b. *Del mismo modo, los alumnos pueden generar distintas combinaciones posibles en este ítem.*

28. a.
■ $\frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4}$, pues $\frac{1}{4} \times \frac{6}{4} = \frac{7}{4}$

■ 2,38 + 0,11 = 2,49, pues 2,49 – 2,38 = 0,11

■ $\frac{29}{30} + \frac{5}{6} = \frac{9}{5}$, pues $\frac{9}{5} - \frac{5}{6} = \frac{54 - 25}{30} = \frac{29}{30}$

■ 1,02 – 0,77 = 0,25, pues 1,02 – 0,25 = 0,77

■ $1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$, pues $\frac{7}{7} - \frac{6}{7} = 1$

■ 3,25 – (1,15 + 1,1) = 1, pues 1,15 + 1,1 = = 2,25 y 3,25 – 2,25 = 1
b. El primero, el segundo y el quinto resultan suficientemente simples como para ser resueltos mentalmente. Lo importante es registrar las operaciones involucradas y poder verbalizarlas, justificando el razonamiento.

29. 2,25 litros por botella; en total, 7 · 2,25 = = 15,75 litros = 15 $\frac{3}{4}$ litros.

Podría haberse planteado el problema mediante fracciones:
2 $\frac{1}{4}$ litros corresponden a $\frac{9}{4}$ litros; luego,

$\frac{9}{4} \cdot 7 = \frac{63}{4}$ litros.

Propiciando el cálculo mental mediante el uso de las propiedades:
$2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$; luego, $(2 + \frac{1}{4}) \cdot 7 = 14 + \frac{7}{4} =$

$= 14 + 1 + \frac{3}{4}$.

30. Dado que el entero representa 1 m^2, y siendo el área de $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{9}$ $m^2 = \frac{5}{36}$ m^2.

Se sombreó $\frac{5}{36}$ del entero.

31. A = 0,28 cm^2 = 0,4 · L cm^2, 0,28 : 0,4 = L;

entonces, $L = \frac{28}{100} : \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$

El largo es 0,7 cm.

32. a. $L_1 \cdot L_2 = 5$. Al proponer un valor para L_1, se obtiene el correspondiente de L_2.
b. Tal vez, las combinaciones propuestas sean del tipo $L_1 = 1$ con $L_2 = 5$, o bien $L_1 = \frac{1}{5}$ con $L_2 = 25$. Es interesante proponer alternativas: ¿Si $L_1 = \frac{2}{7}$, puedo encontrar L_2?

$2 \cdot L_2 = 5$, entonces, $5 : \frac{2}{7} = L_2$; así, $L_2 = \frac{35}{7}$

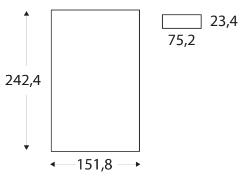
33. a. $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b. $0,27 = \frac{20}{100} \cdot \frac{135}{100}$

c. $\frac{15}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}$

d $2 = \frac{280}{100} \cdot \frac{10}{14}$

34. Un esquema puede ayudar.



a. Los estantes pueden ubicarse "acostados" sobre el largo, de modo que entran 2 en el largo y 10 en el ancho ("hacia arriba"). Entran 20 estantes. Desperdicio en el ancho: $1,4\ cm \cdot 242,4\ cm = 339,36\ cm^2$. Desperdicio en el largo: $150,4\ cm \cdot 8,4cm = 1263,36\ cm^2$. Desperdicio total: $1602,72\ cm^2$. Ubicados "parados" sobre el largo, entran sólo 18 estantes (6 en el ancho y 3 en altura), por lo que el desperdicio es mayor.

35. a. Sí, la tarea pudo llevarse a cabo. En la tabla presentada, se observa:

A: $\frac{8}{20}$ ha/h; B: $\frac{1}{20}$ha/h;

C: $\frac{12}{20}$ ha/h; D: $\frac{48}{20}$ha/h.

La empresa puede cortar el césped de $\frac{69}{20}$ha en una hora.
Las 5 canchas ocupan $\frac{5}{4}$de hectárea, o sea, $\frac{25}{20}$ ha.

Como $\frac{25}{20} < \frac{69}{20}$, el trabajo puede realizarse.

b. Por ser el mcm entre los denominadores.
c. Utilizando la propiedad: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, el ayudante logra resolver la operación dividiendo por 1.
d. El ayudante multiplica en cada caso por el recíproco del denominador.

36. a. $6 \times \frac{1}{6} = 1$; luego, 1 x 5 = 5, o sea,

$(6 \times \frac{1}{6}) \cdot 5 = 6 \times \frac{5}{6} = 5$

b. $6 \times \frac{1}{6} = 1$; luego, $1 \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ o sea,

$6 \times \frac{4}{42} = \frac{4}{7}$

c. Sólo se puede encontrar un número en cada caso, o bien fracciones equivalentes que lo representan, pues el resultado de la operación que permite hallar el número es único.

37. a. Se sugiere comenzar por ejemplificar la situación:

¿Y si multiplicamos por $\frac{1}{4}$? ¿Y por $\frac{2}{3}$? ¿Y por $\frac{3}{2}$? ¿Y si consideramos fracciones de numerador o denominador 1? Es importante que los ejemplos tendientes a concluir que se trata de números < que 1 sean suficientemente diversos.
b. Deben considerarse números mayores que 1.
c. El número elegido debe ser mayor que 1.
d. El número elegido debe ser menor que 1.

38. a y b.
■ 0,71 x 2,12 > 0,71, pues 2,12 > 1

■ 0,71 x 2,12 < 2,12, pues 0,71 < 1

■ $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} < \frac{3}{4}$, pues $\frac{3}{4} < 1$

■ $0,58 : \frac{1}{3} > 0,58$, pues $\frac{1}{3} < 1$

■ $\frac{9}{5} : \frac{1}{2} = \frac{12}{5} : \frac{1}{2} - \frac{3}{5} : \frac{1}{2}$, pues $(\frac{12}{5} - \frac{3}{5}) : \frac{1}{2} =$
$= \frac{9}{5} : \frac{1}{2}$

■ $\frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$, pues $\frac{5}{6} \times (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) =$
$= \frac{5}{6} \times 1$

39. Sí. Puede utilizar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y la de la división respecto de la resta.

40. Sí, es correcto. $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, entonces, $3,48 : 0,25 = 3,48 : \frac{1}{4}$

$= \frac{3,48 \times 4}{1} = 3,48 \times 4$

41. a.
■ Debe multiplicarse por 10.
■ Debe multiplicarse por $100 = 10^2$.
■ Debe multiplicarse por $\frac{1}{100}$, o bien dividirse por 100.
■ Debe multiplicarse por $\frac{1}{100}$, o dividirse por 100.

b. Por las propiedades del producto y la división por potencias de 10.

42. Al analizar las distintas soluciones, tener en cuenta que se incluyan escrituras fraccionarias y decimales. Por ejemplo, $42 \times \frac{4}{9} = 7$;

$\frac{8}{3} \times \frac{21}{8} = 7$; 0,007 x 100 = 100 = 7, etcétera.

43. a. No. Como Pablo no marcó correctamente, no se puede deducir si la calculadora funciona bien o mal.
b. Pablo resolvió [(3 : 5) : 4] : 9, o sea, primero 3 : 5, al resultado lo dividió por 4, y a ese resultado lo dividió por 9. El resultado es 0,016.
b. Si la calculadora tiene tecla de paréntesis, (3 : 5) : (4 : 9), o bien (3 x 9) : (5 x 4).

44. a. 1) 34 x 542,5 = 34 x 54,25 x 10 = 18445.
2) 1,34 x 54,25 = (1 + 0,34) x 54,25 = 54,25 + + 0,34 x 54,25.
3) Siendo $0,34 \times 54,25 = 34 \times 54,25 \times \frac{1}{100} =$ = 18,445. Entonces, 1,34 x 54,25 = = 54,25 + 18,445 = 72,695.
4) $13,4 \times 5,425 = 1,34 \times 10 \times 54,25 \times \frac{1}{10}$ por propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación: 1,34 x 10 x x 54,25 x 1/10 = $1,34 \times 54,25 \times 10 \times \frac{1}{10}$ = 72,695.
b. Se priorizó el producto y cociente por potencias de 10, y el uso de las propiedades, pero, como en todos los casos, no es la única alternativa válida. Otras multiplicaciones: 0,34 x 5,425; 341 x 54,25...

45. Ninguna de las respuesta es correcta.

$$\frac{4,5 \times 0,96}{0,12 \times 0,24} = \frac{\frac{45}{10} \times \frac{96}{100}}{\frac{12}{100} \times \frac{24}{100}} = \frac{45 \times 96}{\frac{12}{10} \times 24} =$$

$$\frac{45 \times 096}{12 \times 24} \times \frac{1}{1} = 150$$

46. Tener en cuenta las mismas recomendaciones que para el problema 42.

47. Ordenando de menor a mayor:
a. $\frac{1}{b}; \frac{2}{b}; \frac{3}{b}; \frac{4}{b}; \frac{7}{b}$

b. $\frac{p}{p}; \frac{p+2}{p}; \frac{p+3}{p}; \frac{p+4}{p}; p+1$

c. $\frac{p-2}{r}; \frac{p-1}{r}; \frac{p}{r}; \frac{p+1}{r}; \frac{p+2}{r}$

48. a. Existen infinitas posibilidades; por ejemplo, $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$; $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$...

b. Debe buscarse que la multiplicación entre los números dados sea 35. Las posibilidades son: $\frac{1}{7} = \frac{5}{35}$ y $\frac{7}{7} = \frac{5}{5}$

49. Para realizar esta actividad, se puede trabajar en papel milimetrado y elegir una unidad múltiplo de 60 mm.

50. a. Ejemplificando en el primero:

$\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$; $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$; $\frac{6}{4} = \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

b. Se pueden formar 4 pares de fracciones con estas características.

51. Se propone un ejemplo para cada ítem.
a. $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{4}$.

b. $\frac{6}{10}$ y $\frac{9}{10}$.

c. 0, 314 y 0,319.

52. a. 1 unidad estará representada por 15 cuadraditos.
b. 1 unidad estará representada por 4 círculos.

53. a. 42,25°
b. 54,37°
c. 0,75°
d. Aproximadamente 93,222°.

54. 1) 35,2° = 35° 0,2 x 60′ = 35° 12′
2) 79,205° = 79° 12′ 0,3 x 60′′ = 79° 12′ 18′′
3) 45,00005° = 45° 0,00005 x 60′ = 45° 0,003′

55. a y b. Ejemplo: Si se piensa el 18: 18 x 3 = = 54, 54 + 6 = 60, 60 – 36 = 24, 24 – 6 = 18, 18 – 10 = 8. ¿Siempre se obtiene el número pensado menos 10? ¿Y si elijo un número menor que 10?
c. Generalicemos buscando el caso en que el elegido es cualquier número N:
N · 3 + 6 – N · 2 – 6 – 10 = N · (3 – 2) + 6 – 6 – – 10 = N – 10
Por propiedad conmutativa de la suma, distributividad de la multiplicación respecto de la resta y la propiedad que asegura que si sumamos y restamos un mismo número, la suma no se altera. La operación resultante “no puede resolverse” si N < 10 en los conjuntos numéricos en los que definimos las operaciones hasta el momento.

56. El tesoro es de 15.621 monedas.
Primer pirata: le da una al loro y divide en 5 lo que resta: 15.620 : 5 = 3124. Toma “su parte”, 3124, y deja el resto: 3124 x 4 = = 12.496 monedas.
Segundo pirata: regala una al loro y divide en 5 lo que queda: 12.495 : 5 = 2499.
Toma “su parte”, 2499, y deja el resto: 2499 x 4 = 9996 monedas.
Tercer pirata: 9995 : 5 = 1999, toma 1999 y deja 1999 x 4 = 7996.
Cuarto pirata: toma 7995 : 5 = 1599 y deja 1599 x 4 = 6396 monedas.
Quinto pirata: toma 6395 : 5 = 1279 y deja 1279 x 4 = 5116 monedas.
De este modo, a la mañana, reparten 5116 monedas entre los 5 y le regalan 1 al loro.

57. Para cada una de las 8 “casillas” en que puedo dividir un byte, tengo 2 posibles dígitos (0 y 1); luego, tengo 2 opciones que se combinan con cada una de las 2 disponibles para las otras casillas, o sea, 2 x 2, 8 veces, 2^8 posibles bytes.

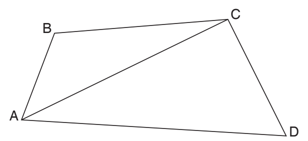
58. Sistema actual: 26 x 26 x 26 x 10 x 10 x 10 = = 26^3 x 10^3 = 17.576.000. Con 7 dígitos: 10^7 = 10.000.000 si se consideran las que comienzan con 0.

T. P. Nº 4 | Cuerpos y figuras

1. a. Algunas posibles preguntas son: ¿Sus bases son círculos? ¿Todas sus caras son congruentes? ¿Sus caras son polígonos regulares congruentes? ¿Algunas caras son triángulos?
El tipo de pregunta que los alumnos formulen pone en evidencia algunos de los conocimientos que poseen respecto de las formas geométricas en cuestión, de sus elementos y de las relaciones entre ellos.
b. Con respecto a las preguntas, se pueden establecer criterios que pongan en evidencia las relaciones geométricas entre elementos de los cuerpos. Por ejemplo: ¿Posee caras paralelas? ¿Tiene cuatro caras congruentes?
c. El cubo es el único de los cuerpos que cumple con las características comunes y las diferentes. En el prisma de base rectangular y en el prisma de base triangular, se cumplen sólo las características comunes.

2. El ángulo FED mide 80°. La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

3. La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°.

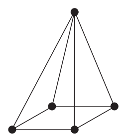


En el cuadrilátero ABCD, se traza el segmento AC; quedan determinados los triángulos ABC y ACD. La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de cada uno de los triángulos vale 180º; entonces, la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD vale 360°.

4. a. El mensaje de Juan no permite identificar el cuerpo. Su compañero podría pensar en un prisma triangular. El mensaje de Vivi permite identificar el cuerpo: una pirámide de base cuadrada. El mensaje de Malu permite pensar en cualquier pirámide de base rectangular.
b. Tiene una base cuadrada y sus caras no paralelas; son triángulos isósceles congruentes.

5. Algunas respuestas posibles son éstas:
Características comunes: un par de caras paralelas, caras planas circulares.
Diferencias: bases perpendiculares a la superficie lateral en uno; en otro, no. Bases congruentes en uno; en otro, no

6. a. Se obtienen 5 figuras planas: 4 triángulos isósceles congruentes y un cuadrado.
b. Se deben tener 8 trozos de alambre, 4 congruentes entre sí y otros 4 congruentes entre sí, y 5 bolillas de plastilina.



7. a. Sus dos bases planas paralelas son polígonos congruentes. Sus caras son paralelogramos.
b. El número total de caras laterales coincide con el número de lados del polígono más las dos bases. El número de vértices es el doble del número de vértices del polígono base.
c. Es la distancia entre los planos paralelos que incluyen a las bases.
Es la longitud de un segmento que tiene por extremos a puntos de cada uno de los planos que incluyen a las bases y está incluido en una recta perpendicular a dichos planos.

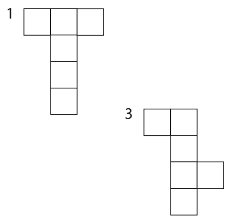
8.

Características de los cuerpos	Nro. de caras	Nro. de vértices	Nro. de aristas	¿Cumple la relación de Euler?
Prisma triangular	5	6	9	5 – 9 + 6 = 2
Prisma rectangular	6	8	12	6 – 12 + 8 = 2

9. a. Hay dos pares de paredes paralelas, y el piso y el techo son paralelos entre sí.
Se puede asegurar que las caras del prisma que representan el piso y el techo son paralelas entre sí, porque ambas forman un ángulo de 90° con las caras que representan las paredes.
b. La cara del prisma que representa el piso del aula es perpendicular a las caras que representan las paredes.

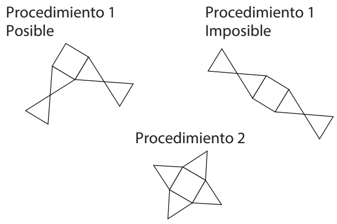
10. a. Una superficie con forma de polígono cóncavo, o bien, observando cada cara, superficies planas rectangulares.
b. Sí. Por superposición, se puede determinar que hay caras y aristas congruentes.

11. a. I. II. IV. V.
b.



12. Una instrucción posible es: Construir un cuadrado de 4 cm de lado, al que se llama base. Sobre cada lado del cuadrado base, construir otros cuadrados de 4 cm de lado. Elegir uno cualquiera de los cuadrados y, sobre el lado opuesto al que comparte con la base, construir otro cuadrado congruente con los anteriores. Plegar por los lados comunes de los cuadrados.

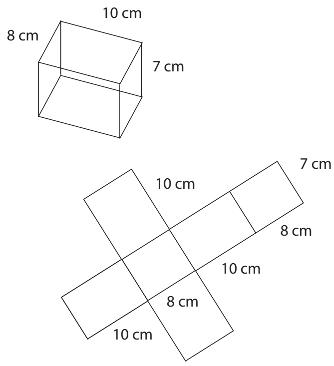
13. Procedimiento 1: Sólo es posible si el segundo lado elegido no es opuesto al primero.
Procedimiento 2: Es siempre posible.



14. Es claro en el caso del círculo que es posible armar un cilindro a partir de trasladarlo en el plano.
En el caso del rectángulo y el cuadrado, deben tenerse en cuenta los ejes de simetría para obtener cilindros a partir de rotar las figuras sobre dichos ejes.

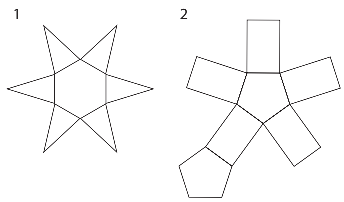
15. Sí. Se toman como bases los rectángulos de 7 cm por 5 cm, el par de rectángulos de 5 cm por 3 cm como un par de caras opuestas de la superficie lateral, y los rectángulos de 7 cm por 3 cm son el otro par.

16. Los dos rectángulos deben medir 10 cm por 8 cm.



17. a. y b. Posibles respuestas:
■ Recortando 4 rectángulos y 2 cuadrados, se construye un prisma de base cuadrada.
■ Con 8 triángulos, un octaedro.
■ Un rombo, no rectángulo, cuyo lado coincida con el lado del cuadrado.

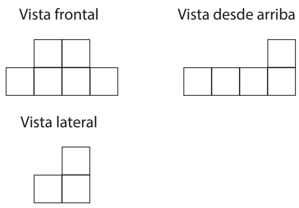
18.



Para el cubo, ver ejercicio **11.**

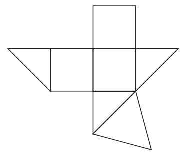
19. a. Los pentágonos y hexágonos deben tener lados coincidentes.
b. Se necesitan 12 pentágonos y 20 hexágonos.

20.



21. I. Cono. II. Cilindro. III. Prisma triangular.

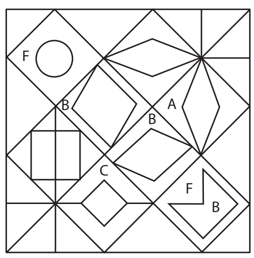
22. a. Una pirámide de base triangular. La cara ABC es un triángulo equilátero, sus lados son las diagonales de tres de las caras del cubo.
b. Podría llamarse heptaedro no regular (por tener 7 caras no todas congruentes): 3 de sus caras son cuadradas, 3 son triángulos isósceles y la séptima es el triángulo equilátero ABC.



23. a. No, la suma de seis ángulos de triángulos equiláteros completa un giro; si son isósceles, puede ser, si el ángulo no congruente es menor a 60°
b. No. Los cuatro suman 360°.
c. No. Superan los 360°.

24. *Una vez realizada la tarea, se sugiere confrontar las distintas clasificaciones para poner en evidencia los criterios geométricos que sustentan a cada una de ellas.*
Puede resultar interesante definir clases y subclases que utilicen distintas relaciones entre elementos.

25. a. Círculo, cuadrado, paralelogramo, triángulo rectángulo isósceles, hexágono cóncavo, pentágono cóncavo, cuadrilátero cóncavo, trapecio isósceles, rombo. Otros posibles: cuadrado con agujero, hexágono cóncavo irregular.
b. El cartel puede ser “cóncavas” y “convexas”, o bien “cuadriláteros” y “no cuadriláteros”.
c.



d. Salvo en algunos casos, como el círculo, existe más de una figura de cada tipo. Sobre todo si se aceptan formas constituidas por más de una figura, por ejemplo, los siguientes heptágonos:

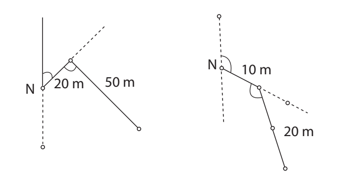
26. Los alumnos deben reproducir la figura a partir de los conocimientos que poseen. Terminada la tarea, se sugiere confrontar los distintos procedimientos puestos en juego, para avanzar con la utilización de relaciones geométricas novedosas para algunos alumnos.
Por ejemplo, perpendicularidad, relación entre las diagonales, puntos medios de los lados.

27. a. Se puede sugerir a los alumnos realizar esquemas utilizando distinto tipo de triángulos, cuadriláteros y pentágonos.
b. Ayelén pudo embaldosar; Daniel, no. Con triángulos, se puede sumar 360° por vértice; con pentágonos, no.
c. Andrés probó con hexágonos regulares.

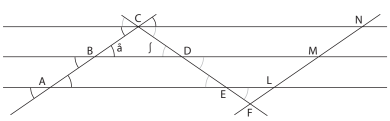
28. a. Sí. Es posible hacer cubrimientos con estos cuadriláteros.
b. Es posible cubrir una superficie con cualquier cuadrilátero, porque se puede sumar siempre 360° por vértice.

29. Puede resultar útil establecer algunos acuerdos: definir la posición de la persona al comenzar el recorrido y considerar que finalizará el recorrido mirando el mismo punto.
a. La persona está en el punto de partida, su mirada forma un ángulo de 30° con respecto al Norte, gira 120°, camina una longitud l. Se detiene y gira 120° en sentido contrario a las agujas del reloj y camina nuevamente una longitud l. Gira por última vez 120° y vuelve a caminar una longitud l. Vuelve al punto de partida en la dirección del último lado, es decir, formando un ángulo de 30° con el Norte, tal como al partir.
Análogamente, en el caso del pentágono, girando cada vez 72°.
b. En ambos casos, la suma de las medidas de los ángulos que ha girado es 360°. Suma de los ángulos exteriores de un polígono.

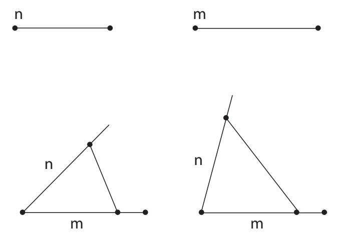
30. 1 2



31.



32. a.



b. Se podrán construir infinitos triángulos; basta variar el ángulo entre m y n.
c. La construcción es posible: cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
d. No es posible: la suma de las longitudes de m y n es la longitud de p.
Las construcciones permiten analizar el número de posibilidades.

33. a. Después de realizar la tarea, se sugiere proponer la discusión sobre las condiciones que deben cumplir tres segmentos para ser lados de un triángulo.
b. Se espera que los alumnos formulen instrucciones donde propongan construcciones de segmentos congruentes utiizando el compás.

34. a. La construcción es posible y no es única. Existen infinitos triángulos que tienen un par de ángulos como los dados.
b. Es posible si las amplitudes de los ángulos dados suman menos de 180°.

35. a. No es posible, pues las amplitudes de los tres ángulos no suman 180°.
b. Sí. Los triángulos dibujados tienen la misma forma y distinto tamaño.
Existen infinitos triángulos con los mismos ángulos y lados de diferentes medidas.

36. a. No, porque las amplitudes de sus ángulos superarían los 180°.
b. Agudos, pues 180° = 90° + b + c; entonces, b + c = 90°. Cada uno medirá menos de 90° (ángulo agudo).
c. No, porque la suma de sus amplitudes superaría los 180°.
d. Agudos.

37. a. Se construye con regla y compás; se observa que se obtiene siempre el mismo triángulo.
b. No, por criterio de congruencia de triángulos. Si con un segmento y dos ángulos adyacentes a él queda determinado un triángulo, es único.

38. Se espera que surjan preguntas tales como las siguientes: ¿Es convexo? ¿Tiene ángulos congruentes? ¿Tiene lados congruentes? ¿Tiene algún ángulo recto? Se reitera que las preguntas que formulen los alumnos den cuenta de los conocimientos geométricos de los cuales disponen.

39. Episodio 4
Coinciden en sus ángulos y se distinguen en sus lados. Rombo y paralelogramo.
Se mantienen los lados y se alteran los ángulos. Bastará con mostrar un contraejemplo.

40. La justificación no siempre es única y se puede recurrir a las propiedades conocidas.
a. Verdadero. Paralelogramos con todos sus lados congruentes.
b. Falso. Existen rombos que no tienen ángulos rectos.
c. Falso. Existen rectángulos que no tienen sus cuatro lados congruentes.
d. Verdadero. Son paralelogramos con cuatro ángulos congruentes.
e. Verdadero. Sus diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes.
f. Falso. Sus ángulos no necesariamente son rectos.

41. a. El cuadrilátero construido resulta ser un paralelogramo, pues sus diagonales tienen intersección en su punto medio (P). Se cumple la propiedad de las diagonales de un paralelogramo.
b. El paso III debe decir que dibujen otro segmento CD de 5 cm, perpendicular a AB, por su punto medio (P). P deberá ser también el punto medio de CD.

42. *Se sugiere organizar la clase en pequeños grupos y analizar las producciones en una puesta en común.*

43. Se pueden construir con triángulos equiláteros un tetraedro, un octaedro o un icosaedro; con cuadrados, un cubo o hexaedro; con pentágonos regulares, un dodecaedro.

44. a. Las otras caras son los cuadrados ADBC, BFGC, EFGH, BFED y ACGH.
b. Los otros vértices son B, C, D, E, F, G y H.
c. Las otras aristas son AD, DE, EH, BF, FG, GC, CB, DB, EF, AC y HG.

45. a. Pentágonos.
b. Polígonos cóncavos.
c. Polígonos regulares.
d. Cuadriláteros.
e. Polígonos con pares de lados opuestos paralelos.
f. Polígonos que no tienen cuatro lados.

46. Icosaedro truncado (pelota de fútbol): sus caras son hexágonos y pentágonos regulares. Prisma de base triangular : sus bases son triángulos equiláteros y sus caras laterales son cuadrados. Dodecaedro truncado (pentágonos regulares y triángulos equiláteros). Octaedro truncado (pentágonos regulares y cuadrados). Si se trunca cada vértice de un poliedro regular, es posible obtener uno no regular; sus caras serán alguno de dos polígonos regulares diferentes.

47. b. No siempre se llega a la construcción pedida. En II, debería decir "construir una circunferencia con centro en A de radio mayor a la mitad de la longitud del segmento AB".
c. En las conclusiones, aparecerá la necesidad de agregar condiciones al radio de las circunferencias trazadas.

48. a. Falsa: dos rectas de un mismo plano que no se cortan son paralelas.
b. Verdadera

49. a. y b. Se traza una recta AB: A y B determinan un segmento. Se construye una perpendicular al segmento AB (ver el procedimiento del problema 48). Se obtiene la recta CD perpendicular a la recta AB. Se considera un segmento de la recta CD. Se traza una perpendicular EF al segmento con el procedimiento utilizado en el primer paso.
Quedan determinadas dos rectas paralelas: AB y EF.

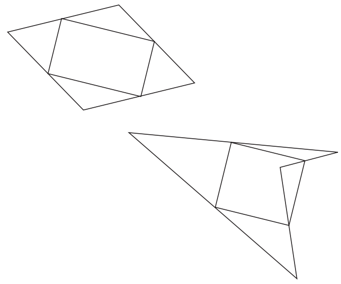
50. a. Iguales: rectángulos. Perpendiculares: rombos. Se cortan en puntos medios: paralelogramos.
b. Trapecio no isósceles.
c. Rectángulo: sus diagonales se cortan en su punto medio y son congruentes.
Rombo: sus diagonales se cortan en su punto medio y son perpendiculares.
Cuadrado: sus diagonales se cortan en su punto medio, son congruentes y perpendiculares.

51. a. 12 varillas.
b. 10 bolitas de plastilina.
c. 8 varillas y 5 bolitas de plastilina.
d. Antes de construir, se anticipará cuántas varillas de cada longitud se necesitan.

52. En el desarrollo II.

53. El triángulo tiene sus ángulos congruentes: es equilátero. En todo triángulo, a ángulos congruentes se oponen lados congruentes; entonces, también sus lados son congruentes. Es lo mismo medir cualquiera.

54. a. y b.



De ser necesario, se puede sugerir a los alumnos que construyan paralelogramos y no paralelogramos, cuadriláteros cóncavos y convexos.
c. y d. En todos los casos, obtienen paralelogramos.

T. P. Nº 5 | Medidas y mediciones

1. Tomando algunos ejemplos:

Resultados de análisis	
47 mg % 164 mg % 30 u/l	Peso
1,5 mn/ml	Unidades/ capacidad
19/11/02	Tiempo

Informe científico	
1; 2; 3; 4; 5 días	Tiempo
0,24; 2,78; etc. cm^2	Área

Periódico		
10 mm 3, 18 m 3,24 m 4,02 m 4,17 m	 1,10 m 0,82 m	Altura
2800 m^3/s		Caudal
7 y 17 de abril 2001		Tiempo

Folleto turismo	
14 °C, etc.	Temperatura
81,7 mm, etc.	Altura
1,3 días	Tiempo

2. a. Todos los criterios son válidos si pueden ser justificados.
b. ¿Cuál de los criterios de clasificación usados permite realizar comparaciones más interesantes entre los datos? ¿Una tabla puede ayudar? ¿Qué significa que las cantidades son comparables?

3. a. Se sugiere que después de que cada alumno resuelva este ítem se anoten todas las fórmulas en el pizarrón para que todos tengan la mayor cantidad de fórmulas en su lista.
b. L_C = 3,09 cm; L_T = 4,12 cm
No, debe ser menor, pues sería
A = 5,5 x 5,5 = 30,25 m^2.

4. b. Fileas Fogg: 26.000 millas terrestres:
1609 x 26.000 m = 41.834.000 m
Capitán Nemo: 20.000 leguas marítimas x
x 3 = 60.000 millas náuticas = 60.000 x
x 1852 m = 111.120.000 m

5.

Magnitud	Cantidad	Otras unidades
Peso	47 mg	gramo, kilo, decagramo…
Superficie	36,30 cm^2	hectárea, metro cuadrado…
Longitud	12,36 cm	metro, milímetro, kilómetro…
Tiempo	3 días	año, mes, minutos…

6. b.
- 1 milla = 1609 m 1 km = 1.000 m
10 millas = 16.090 m 10 km = 10.000 m
(10 millas > 10 km)

- 1 pulgada = 2,4 cm
medida en pulgadas < medida en centímetros

7. Episodio 5
Primera parte: Considerando que el grabado corresponde a una fecha y construyendo una tabla de conversión a días, de derecha a izquierda, quedaría esto:

8 baktumes	14 katunes	3 unes
8 x 20 x 20 x 360 1.152.000 días	14 x 20 x 360* 100.800 días	3 x 360 días 1080 días

1 uinal	12 kines
20 días 20 días	12 días 12 días

*14 katunes corresponden a 14 veces 20 unes, o sea, 14 veces 20 x 360, siendo cada un de 360 días.
El año fue grabado 1.253.912 días a partir del día 0 de ese calendario. O sea, a 1.253.912 : 365 = 3.435,375342 días del 0, es decir, 3.435 años gregorianos completos. Pero contados desde el año 3.113 a. C.
El frontispicio fue escrito en el año gregoriano 322.
Segunda parte: A mayor cantidad de meses, menor cantidad de días por mes.

8. a. Los egipcios priorizaron una unidad física que consideraron suficientemente constante, mientras que los babilonios, con un sis-

tema de numeración posicional, mejor estructurado, priorizaron respetarlo en su sistema de medida, usando múltiplos o divisores de su base. Dado que los sistemas aditivos no facilitan la operatoria, cabe suponer que los egipcios generaron otras unidades para la práctica cotidiana.
b. Si bien las cifras son las mismas, en cada caso representan números diferentes según la base en la que están expresados. En el primer caso, el sistema es de base 20; en el segundo, el sistema es el decimal; en el último, es de base 60.

9.

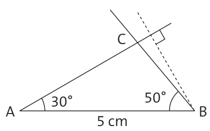
EXPRESIÓN DE LA CANTIDAD	NUEVA UNIDAD	CÓMO SE MODIFICA LA MEDIDA	NUEVA EXPRESIÓN DE LA NUEVA CANTIDAD
4,05 m	centímetro	4,05 x 100	405 cm
3680 m	kilómetro	3680 : 1000	3,680 km
450 ml	litro	450 : 1000	0,450 l
2,5 tn	kilogramo	2,5 x 1000	2500 kg
15 min.	segundo	15 x 60	900 seg.
10.800 seg.	hora	10.800 : 360	30 h

10.

	Perímetro		Área	
Figura	Cambia	Cómo cambia	Cambia	Cómo cambia
II	Sí	Disminuye	Sí	Disminuye
III	Sí	Disminuye	Sí	Aumenta
IV	Sí	Aumenta	Sí	Aumenta
V	Sí	Disminuye	No	
VI	No		No	

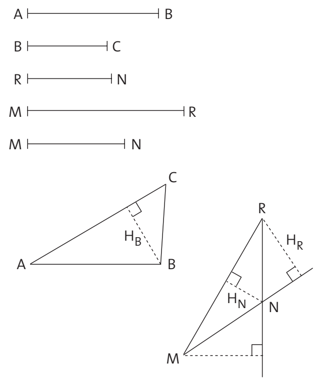
Es importante reflexionar sobre los resultados: ¿Pueden anticipar modificaciones en el área por modificaciones en el perímetro? ¿Pueden crear a partir de la figura I una en la que el perímetro sea mayor y el área, menor?

11.



a. El lado BC aumenta, pero el AC disminuye y no puede asegurarse la variación del perímetro.
b. Aumentan ambos lados, de modo que el perímetro aumenta.
c. No existe un valor del ángulo B que asegure un perímetro menor pues, a medida que el lado BC crece, decrece el lado AC tanto como queramos.

12. a y **b.**



c. Deberían obtenerse valores muy cercanos al calcular el área con distintos datos para un mismo triángulo. Conviene preguntar: ¿Las diferencias son muy grandes? ¿A qué pueden obedecer esas diferencias?

13. a. *¿Qué significa "error aceptable"? Este ejercicio propicia una reflexión acerca de la relatividad en la consideración del error.*
b. Un cuadro como el siguiente ayuda a generalizar conclusiones (se sugiere repreguntar sobre la independencia del área respecto de la base y la altura elegidas).

	BASE ELEGIDA	ALTURA CORRESPONDIENTE	ÁREA OBTENIDA
TRIÁNGULO ABC			

14. ■ Para el cuadrado:
Perímetro dato: P = 8 cm = 4 · L.
Perímetro modificado: 2 · P: el perímetro se duplica.
Área dato: $A = 4\ cm^2 = L^2$.
Área modificada: $16\ cm^2 = 4 \cdot L^2 = 4 \cdot A$
■ Para el triángulo:
Perímetro dato: $P = 12\ cm = L_1 + L_2 + L_3$.
Perímetro buscado: 2 · P.
Área dato: $A = 4 \times 3 : 2\ cm^2 = 6\ cm^2$.
Área modificada: 4 · A
Al duplicarse los lados, el perímetro se duplica y el área se cuadruplica.

15. I. Per : $4a + b + c = 4a + b + \sqrt{4}a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2$

Área : $a^2 + \frac{a^2}{2} + a \cdot 2a = 3\ \frac{1}{2}\ a^2$

II. Per. : $4a + 2b = 2\ (2a + b)$
Área : $a^2 + a^2 = 2a^2$
III. Per : 4a + 4a + 4c (donde *c* es la medida de la diagonal de un cuadrado de 2 x 2)

Área : $\left(a \cdot \frac{2}{3}\ a\right) 4 + \left(\frac{2}{3}\ a \cdot \frac{2}{3}\ a\right) \cdot \frac{4}{2} = \frac{32}{9}\ a^2$

Que también puede calcularse:
$\left(\frac{7}{3}\ a\right)^2 - a^2 - 2\ \left(\frac{2}{3}\ a\right)^2$

16. *Se sugiere realizar una puesta en común para descubrir los valores obtenidos.*

17. a. *Comparar con la ficha de la pág. 63 del Anexo teórico.*
b. *Se sugiere debatir: ¿Qué aproximación podemos aceptar? ¿Podemos considerar 3 como aceptable?*

18. a. Si se toma un ejemplo sencillo utilizando

un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5:

$A = \frac{b \cdot n}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = b$

$A = \sqrt{6} \cdot (6 - 3) \cdot (6 - 4) \cdot (6 - 5) = \sqrt{36} = 6$
Si los cálculos se realizan con datos obtenidos a partir de mediciones, es interesante discutir las diferencias que se obtienen debido a los errores propios de la medición.
b. Área del triángulo equilátero = $\sqrt{s \cdot (s - l)^3}$
$\frac{3}{2}\ l\ \left(\frac{3}{2} l \cdot l\right) = \frac{3}{16} l^4 = \frac{3}{4} l^2$

19. a. Un esquema del círculo inscripto en el cuadrado puede ayudar.
Área del círculo = $\pi \cdot (4{,}5)^2 = 63{,}59$. La aproximación obtenida es aceptable.

b. El área resultante será $\left(9 - \frac{1}{9} \times 9\right)^2 = 64$,

o sea que se obtuvo en este caso una mejor

aproximación. Generalización: Si considera-

mos un círculo de radio *r*, el lado del cuadra-

do es 2r y el de los triángulos en los vértices

es r : 3; área del círculo = $\pi \cdot r^2$

Primera aproximación: $(2 \cdot r)^2 - (2r : 3)^2 \cdot 2 =$

$= r^2 \cdot \left(4 - \frac{8}{9}\right) = r^2 \cdot 2{,}666666667$

π se ha aproximado mediante 2,66..., o sea,

una aproximación por defecto.

Segunda aproximación: $\left(2 \cdot r - \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot r\right)^2 =$

$= 4r^2 - \frac{8}{9} \cdot r^2 + \frac{4}{81} \cdot r^2 = r^2 \cdot 3{,}169382716$

π se aproxima por exceso: 3,169382716,

con una mejor aproximación que la anterior.

20. a. ¿Serán muy pesados los 26 cartones para dos chicos? ¿Cuál será el peso que piensan

que pueden llevar entre dos? ¿De qué depende? ¿Por qué no averiguar el peso de un cartón de leche? ¿Y respecto del tamaño de la caja? ¿Qué tipo de envase es el que debe comprarse?
b. Un esquema de la caja puede ayudar. ¿De cuántas formas pueden acomodarse los cartones de leche? En ambos tipos, pueden entrar 26 cartones en una caja. Como ejemplo, tomaremos una de las posibles distribuciones del primer tipo de envase. Pueden ubicarse paradas sobre su base menor, con el lado de 6 cm sobre el lado de 35 cm en la caja: podremos alinear 5 cartones (35 : 5), con un desperdicio de 5 cm en el ancho de la caja. En la profundidad, sobre los 25 cm podemos ubicar 2 veces la profundidad de 9,5 cm del cartón (25 : 9,5). El desperdicio es ahora de 6 cm, que pueden aprovecharse ubicando 3 cartones atravesados, con sus lados de 6 cm cubriendo esa zona libre. En la altura, podemos encimar otra tanda de cartones como la anterior (40 : 16,5) y todavía sobrarán 7 cm, que podremos aprovechar ubicando cartones “acostados” sobre su cara mayor, 3 o 4 dependiendo del modo en que los “acostemos”, lo cual en este caso hace un total de 29 ó 30 cartones.
Convendría que los alumnos explicaran todas las posibilidades.

21. a. No. El cartón usado en ambos casos tiene la misma superficie, pero la capacidad de la caja depende de su volumen. En la caja de la izquierda, el volumen es aproximadamente de 4,05 cm ^{3}, mientras que en la de la derecha será aproximadamente de 3,36cm ^{3}. Esto significa que a igual superficie, el tipo de corte permite distintos volúmenes.

b. No. Consideraremos que se refiere a un cartón cuya área es $\frac{1}{2}$ de la anterior, conservando su forma. Si nos referimos a los lados del rectángulo de cartón de la figura, el área es $A = L_1 . L_2$, la mitad de superficie será $\frac{A}{2} = (L_1 . L_2) : 2$, lo que no indica que los lados queden divididos en dos. Así, uno de los lados puede considerarse la mitad que el dado, mientras el otro no modifica su longitud. Suponiendo que el lado vertical es la mitad del de la figura, las otras dimensiones de la caja no se modificarán. Suponiendo que los dobleces necesarios para las solapas son los mismos, la arista modificada de la caja es menos de la mitad de la arista original, por lo que el volumen total será menor que la mitad del anterior y, por lo tanto, no contendrá la mitad de jugo.

22. ■ Área total en cm ^{2}= 4 x 8,5 x 7 + 72,25 x 2 = = 382,5
V = 505,75cm ^{3}.
■ No podrá hallarse el área lateral, pues los datos no permiten obtener el perímetro de la base. V en cm ^{3} = 18 x 7 = 126.
■ Área total en cm ^{2} = 2 x π x ◊ $\frac{9,42}{3,14}$ x 2,5 + 9,42 = 36,11
V = 23,55.
■ No podrá calcularse lo pedido.
No puede obtenerse el área de la base, ni la altura.

23. Calculando los tres volúmenes obtendremos la información necesaria.
Primer volumen: V = 10 x p x 102 = 3140.
Segundo volumen: descomponiendo el volumen en un prisma de base cuadrada de 10 de lado y 2 prismas de base rectangular,
V = 10 x 10 ^{2} + 2 x 20 x 5 x 10 = 1000 + + 2000 = 3000.

Tercer volumen: $\frac{4}{3}$ x 3,14 x 10 ^{3} : 2 = 2093,3̸

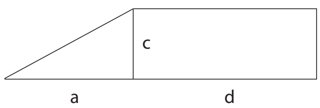
Les convenía usar recipientes cilíndricos.

24. Se sugiere organizar un momento de discusión de las síntesis realizadas.

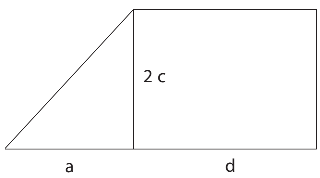
25. ■ 0,125 g = $\frac{125}{1000}$ = $\frac{1}{8}$ g

■ $\frac{1}{2}$ ml = 0,05 cl

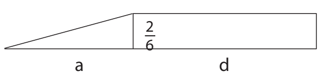
26. a. Consideraremos la figura que se obtiene mediante un triángulo rectángulo con base en el cateto a y altura en el cateto c, y un rectángulo de lados c y d: A = a · c : 2 + c · d .



b. Duplicando la altura c: A = a · c + 2 · c · d (el área se duplica).



Reduciendo la altura c: A = a · c : 4 + c · d : 2
a$\frac{1}{2}$ del área original b



27. b. Pueden especificarse condiciones para los problemas. Por ejemplo, que unos sean de volumen y otros de área, que los datos no tengan todos la misma unidad, que el problema no pueda resolverse por falta de datos, etcétera.

28. a. Unificaremos las unidades en metros, suponiendo que siguen conservando la misma cantidad de varas:

	CUADRA	TERRENO
1700	127,35 m	14,8575 m x 63,675 m
DESPUÉS DE 1822	130,155 m	15,18475 m x 65,0775 m

*En la actualidad, solemos hablar de cuadras de 100 metros y terrenos de 8,66 metros de frente (aproximadamente 1 vara) y cuya medida del fondo depende de la ubicación.
b.

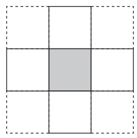
	ENTRE RÍOS	SAN JUAN
150 VARAS	130,275 m	125,415 m

29. Se necesitan 600 gramos de semilla.

30. Suponemos en ambos frascos igual concentración: Si cada botella cuesta p pesos, el frasco cuesta p : 3, pero hacen falta 4 frascos para llegar al contenido de la botella, lo que nos costaría p : 3 x 4, o sea, p · $\frac{4}{3}$, que es un costo mayor pues $\frac{4}{3}$ es mayor que 1.

31. a. A = 3,14 x 36 cm ^{2}, aproximadamente.
b. ¿Qué se considerará aproximación aceptable en este caso? ¿Cuán exacta fue nuestra medición para el diámetro del vinilo?

32. a.



	ÁREA DE LA BASE	ÁREA LATERAL
A	100 cm ^{2}	4 x 100 = 400 cm ^{2}
B	25 cm ^{2}	4 x 5 x 10 = 200 cm ^{2}
C	25 cm ^{2}	20 x 5/2 = 50 cm ^{2}

	ÁREA TOTAL	CARTULINA NECESARIA*
A	500 cm ^{2}	30 x 30 = 900 cm ^{2}
B	225cm ^{2}	25 x 25 = 625 cm ^{2}
C	75 cm ^{2}	10 x 10 = 100 cm ^{2}

*Ver esquema.
b.

ÁREAS LATERALES	ÁREAS TOTALES
$A_A = 2^a{}_B = 8^a{}_c$	$A_A = \frac{20}{9}{}^a_B = \frac{20}{3}{}^a_C$
$A_B = \frac{1}{2}\ A_A = 4^a{}_c$	$A_B = \frac{9}{20}{}^a_A = 3^a{}_C$
$A_C = \frac{1}{8}{}^a_A = \frac{1}{4}{}^a_B$	$A_C = \frac{3}{20}{}^a_A = \frac{1}{3}{}^a_B$

c. V_A = 100 x 10 cm ^{3} = 1 dm ^{3}

V_B = 25 x 10 cm ^{3} = 250 cm ^{3} =

= 0,250 dm ^{3} = $\frac{1}{4}$ dm ^{3}

$V_c = 25 \times \frac{5}{2}$ cm ³ = 62,5 cm ³ =

= 0,0625 dm ³ = $\frac{1}{6}$ dm³

33. Volumen del cuerpo: V = 367,38 mm ³ = = 0,36738 cm ³
a. Peso en bronce: 7,8 x 0,36738 g = = 2,865564 g = 2,865564 : 1000 kg.
Precio en bronce: 8 x 2,865564 : 1000 pesos = 0,023 pesos (aprox.).
b. Peso en hierro: 8,7 x 0,36738 g = 3,196 g = 3,196 : 1000 kg.
Precio en hierro: 3 x 3,196 : 1000 pesos = 0,0096 pesos (aprox.).

34. a. Según los plegados del problema 21, además de considerar las tapas de las cajas, hay que tener en cuenta cartón para las altas, que debe calcularse en forma aproximada.
b. Suponiendo que las aletas y pliegues llevan la misma cantidad de material, debe calcularse la superficie de cartón utilizada en cada caso. En el primer envase: S = 2 x 4 x 6,5 cm ² + (4 + 13) x 10,5 cm ² = 230,5cm ²
En el segundo envase: la superficie que determina la capacidad es la del paralelepípedo recto: 200 = 4,5 x 4 · n, siendo *n* la altura de la superficie mencionada: n = 200 : 18 = = 11,11 y S = 224,89cm ².
El primer envase resulta más conveniente, pues puede contener 25% más jugo que el segundo con sólo 2,5% más de cartón.

35. a. El razonamiento correcto es el de Sergio, pues Ana calcula el volumen del paralelepípedo.
b. V = Superficie del triángulo x profundidad = (5 x 4,3 : 2) x 14,5 = 155,875 cm ³.

36. Tomando un cuadrito como unidad de superficie y su lado como unidad de longitud:

	SUPERFICIE	PERÍMETRO
I	5 x 4 = 20	18
II	12 + 8 = 20	6 + 4 ◊8 = 17,31
III	12 + 28 = 20	6 + 4 x 3,14 = 18,56

Como las superficies son iguales, conviene fabricar el de menor perímetro, o sea, el II.

37. a. Siendo *p* el número elegido por el profesor y a, el elegido por los alumnos, debe ser p · 4 – a · 4 = 12, entonces, (p – a) · 4 = 12, por lo que debe elegirse a para que p – a sea 3.
b. Debe elegirse para que p – a sea 6.

T. P. Nº 6 | Razones y proporciones

1. a. I. Hay más chicas que varones, porque al inicio habría más chicas y se añade la misma cantidad a cada grupo.
II. Total de litros de pintura: 9. Pintura roja: 5 de 9, o sea, $\frac{5}{9}$.
III. En cada grupo de 7 alumnos, hay 4 chicas y 3 varones. Por lo tanto:
7 alumnos .... 4 chicas
28 alumnos .... $\frac{4 \times 28}{7}$ = 16 (chicas)
También pueden pensar en formar grupos de 7 alumnos. Se formarán 4 grupos, con 4 chicas en cada uno; en total, 16 chicas.
IV. La amplitud del sector que corresponde a sobresaliente en el primer gráfico es de 72º, se asocia al 20%.
V. 40 cm ² .... 2000 pesos
60 cm ² .... $\frac{2000 \times 60}{40}$ = 3000 (pesos)

b. A modo de ejemplo:

PROBLEMA	I	II	III	IV	V	NOTA
PUNTAJE	10	0	0	10	10	6

50 10
30 .... $\frac{10 \times 30}{50}$ = 6 (puntos)

2. a. Si los potes tuvieran la misma cantidad A-na tendría razón, pero Lecherísima tiene 1,2 g de grasa por cada 125 g de yogur, que equivale al 0,96% y Pandy tiene 5,8 g por cada 200 g, que equivale a 2,32% que es casi el triple.
b. Para facilitar la comparación, se sugiere unificar la unidad en una tabla.

	Lido	Coopi	Lohay	Isima
Grasas	33,5 g	30 g	28 g	15 g
Calcio	607 mg	1050 mg	1000 mg	1000 mg
Vitamina A	2000 UI	2110 UI	500 UI	2500 UI
Vitamina D	400 UI	400 UI	160 UI	250 UI
Hierro	8 mg	No informa	No informa	No informa

- Vitaminas: Isima.
- Calcio: Coopi.
- Grasa: Isima.

c. Lido, Coopi e Ísima cumplen con ese requisito.

d. Conociendo los mg por litro, podemos establecer cuánto se debe consumir para asegurar un consumo entre 600 y 700 miligramos diarios:
Lido: 607 mg .... 1 l
600 mg .... 1 x 600 : 607 = 0,99 l
700 mg .... 1 x 700 : 607 = 1,15 l
Debe consumir aproximadamente entre 0,99 y 1,151 litros.
Debe consumir aproximadamente 1 litro de Lido.

Coopi: Si deben consumirse x litros, podremos expresar $\frac{600}{1050} = \frac{x}{1}$, entonces,

x = 600 : 1050 = 0,57 litros.

Lohay e Isima: $\frac{600}{1050} = \frac{x}{1}$, entonces,

x = 600 : 1000 = 0,6 litros

3. Respecto de la formación de la comisión: de los 20 miembros, 10 corresponden a la Agrupación Verde (AV) y 10, a CCC. La cantidad de mujeres y hombres de cada grupo se decide por la cantidad de votos femeninos o masculinos que la agrupación haya tenido.

- Para AV en el 2000 la relación de votos femeninos con respecto al total fue de $\frac{203}{354}$= = 0,57 aproximadamente, o sea, más del 55 % de los votos, por lo que AV contó con 6 mujeres en su grupo. ¿Qué relación presentan esos votos de AV en el 2002? $\frac{75}{177}$= 0,42 aproximadamente.

Para cumplir lo expresado por AV, debería mantenerse la proporción del año 2000, que no se verifica en el 2002. Esta vez, están más cerca del 40% que del 50%. Éste es un buen argumento a favor de CCC, 4 mujeres y 6 hombres, al menos en el grupo de AV.
- Para CCC, el 2000 la relación de votos femeninos respecto del total fue $\frac{161}{341}$ = 0,47

Esto le otorgó a las mujeres 5 puestos, dado que la relación de votos masculinos respecto del total, $\frac{180}{341}$ = 0,52, no pasa el 55% de los votos.

¿Y en el 2002? La relación de votos femeninos fue $\frac{79}{170}$ = 0,46, lo que volvería a otorgar 5 votos para las mujeres en condiciones similares a las del año 2000. En este caso, AV tiene razón.

O sea que cada agrupación tiene razón respecto de un caso, pero no del otro.

4. $\frac{203}{354} = \frac{57}{100}$

5. **a.** Debe verificarse $3 \cdot m = t \cdot n^*$
b. Sí, pues se verifica la relación * dada en **a.**
c. No puede anticiparse que su propuesta sea correcta hasta no conocer el valor *m* elegido: debe verificarse que $3 \cdot m = 5 \cdot 14$. Sin embargo se podría afirmar que *m* no puede ser natural.
d. Vale para *n* y $m = 3/4^n$

6. **a.** Los dos planteos son correctos.
b. En el primer planteo, al dividir 70 : 30 se podrían considerar más decimales.

7. *Como en otras ocasiones, se recomienda interiorizarse sobre el uso de las distintas calculadoras que pueden convivir en el aula.*
a. Se sugiere interpretar las expresiones dadas previamente pues, dependiendo de la calculadora, estas opciones pueden llevar a error.
b. Se obtiene el mismo resultado, pues la tecla % de la calculadora divide por 100. Para 40 x 120%, los cálculos resultan 40 x 1,2. Para 120 x 40%, resultan 120 x 0,4.
En ambos casos, es 40 x 120 : 100, por conmutatividad del producto.
El docente puede preguntar qué representa 40 x 120%. ¿Y 120 x 40%?
El 40% de 120 es igual al 120% de 40.
c.
- $x : y \cdot 100$
- $y - (x \cdot y : 100) = y \cdot \frac{100 - x}{100} - x$ pues
- $y - x \cdot y : 100 = y \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = y \cdot \frac{(100 - x)}{100}$
- $y + x \cdot \frac{y}{100} = y \cdot \frac{(100 + x)}{100}$

En todos los casos, se obtiene una expresión operativa que, según la calculadora que se use, permitirá usar la tecla de porcentaje.
d. Ver ítem **a.** No todas las calculadoras funcionan igual. Debe tenerse en claro lo que se quiere calcular.

8. **a.** El descuento es la diferencia entre lo que cuesta la camisa y lo que se cobró:
50 – 50 x 0,85 = 7,5 pesos. ¿Qué porcentaje se descontó? ¿Qué porcentaje es 7,5 de 50?
7,5 x 100 : 50 = 15. Se descontó el 15%.
También se puede pensar que le cobra el 85 % del precio marcado.
b. Por lo concluido en **a.**, siendo *p* el precio del artículo:
20% rebaja $p - 20\%\, p = 80\%\, p = p \cdot 0{,}8$
25% rebaja $p - 25\%\, p = 75\%\, p = p \cdot 0{,}75$
40% rebaja $p - 40\%\, p = 60\%\, p = p \cdot 0{,}6$
c. $p + \frac{15 \cdot p}{100} = p \cdot \frac{(100 + 15)}{100} = p \cdot 1{,}15$
d. No es correcta la operación de Juan. Al sumar un 20% de 600, no suma el 20% que rebajó, sino menos, pues no lo calcula respecto del valor inicial.

9. *Esta actividad permite formalizar y unificar los procedimientos de cálculo.*

10. **a.** Zona oscura: 120°. Zona intermedia: 210°. Zona clara: 30°.
b. 120° representa $\frac{1}{3}$ del total, $0{,}3\overline{3}$% del total: aproximadamente 666 personas.
210 representa $\frac{7}{12}$ del total, $0{,}58\overline{3}$%: aproximadamente 1166 personas.
30 representa $\frac{1}{12}$ de los votos, $0{,}08\overline{3}$% : aproximadamente 166 personas.

11. Episodio 6
Al reducir las láminas, cada reducción se hace en relación con la anterior. Así, reducir 50% y luego otro 30% no es reducir un 80%, pues el 30% se aplica a la lámina reducida y no al original.

12. **a.** Cada 1000 habitantes en 1990, en 1996 hubo 1013,13 habitantes.
b. La primera columna es la suma de las otras dos; la segunda representa el crecimiento por natalidad; la tercera, por migraciones. Un crecimiento migratorio negativo representa que algunos habitantes han dejado la provincia.
c. En ambos casos, Tierra del Fuego: mayor valor de las columnas 2 y 3.
d.

	PORCENTAJE DE CRECIMIENTO	
	NATURAL	MIGRATORIO
Neuquén	50%	50%
Tierra del Fuego	38%	62%
San Luis	65%	35%
Chubut	69%	31%

13. El faltante se debe a que al convertir fracciones en decimales se escribió una expresión decimal aproximada.

14. **a.** *Es conveniente comparar las alternativas de resolución propuestas por los chicos.*
b. La “lectura” de la proporción es, a veces, la mejor explicación del reparto proporcional.
Por ejemplo: $\frac{6}{3} = \frac{C}{500}$. Las horas trabajadas por Carlos, respecto del total, deben ser proporcionales a lo que Carlos cobra del total.

15. *Se sugiere trabajar con la ejemplificación de las definiciones.*

16. **a.**

$\frac{13}{10}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{2}$
30%	16%	12%	120%	250%

b.

$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
10%	40%	150%	1%	0,1%

17. **a.** Se divide por dos.
b. Se divide por 2 y por 4 la cantidad dada y se suma.
c. Se suma la cantidad más $\frac{1}{4}$ de la misma.
d. Se resta $\frac{1}{5}$ de la cantidad a la dada, o se multiplica por 0,80.

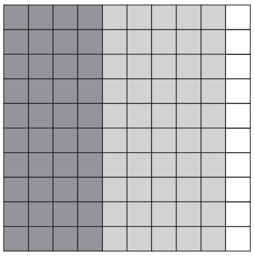
18. **a.** Aproximando al 30%: 1200.
b. 40% de 6000 = 240
c. Aproximando al 20%: 743 : 5 = 148,6.
d. Aproximando al 55%: 2500 + 250.

19. **a.** Falso.
b. Verdadero.
c. Falso.
d. Verdadero.

20. **a.** $35 \times 1500 : 100 = (10 + 10 + 10 + 5) \cdot 15 =$
$= 150 + 150 + 150 + 75$. Por propiedad distributiva.

21. $p < 15\%$, siendo *p* el porcentaje que debe sumarse.

22. a. 66%.
b. 40%.
c.



Grisado oscuro: 40% del partido verde.
Grisado claro: 50% del partido rojo.
Sin grisar: 10% de votos en blanco.

23. Es lo mismo operar de un modo u otro, siendo P el valor del artículo.
Según Ana:
(P · 121 : 100) · 0,85 = P · 1,0285.
Según César:
(P · 0,85) · (121 : 100) = P · 1,0285.

24. Repartiendo proporcionalmente:
V1 + V2 + V3 + V4 + V5 = 5000
Siendo Vi lo que debe pagar cada vecino, si V1 y V2 tienen 12 metros de frente, V3 tiene 20 metros de frente y V4 y V5 tienen 15 metros, y el total es de 74 metros:

$\frac{5000}{V_1} = \frac{74}{12}$; luego, $V_1 = \frac{5000 \times 12}{74}$ = \$810,8.

$V3 = \frac{5000 \times 20}{74}$ = \$1351,35

$V_4 = \frac{5000 \times 15}{74}$ = \$1013,5.

Si sumamos los pagos, 2 x 810,8 + 1351,35 + 2 x 1013,5 = \$4999,95. La diferencia se debe a las aproximaciones anteriores.

25. No es lo mismo.
Con el 40%:
p · 140 : 100 – p · 140 : 100 · 0,60 =
= p · 1,4 – p · 1,4 · 0,60 = p · 0,56
Con el 30%:
p · 130 : 100 – p · 130 : 100 · 0,70 =
= p · 1,3 – p · 0,91 = p · 0,4

26. Conviene tomar el crédito al 2% mensual, independientemente de cómo se estipule el pago de los saldos correspondientes.

27. Si llamamos E al número de entradas vendidas antes del aumento:
a. La recaudación era de 7,5 · E. Con el aumento, la recaudación será de
E · 0,85 · 9 = 7,65 · E. Se recauda más.
Índice de variación: 0,85.
b. Debería ser E · 0,85 · p = 7,5 · E; entonces, p = 7,5 : 0,85 = 8,8 aproximadamente.

28. Esta actividad puede realizarse con un mapa en el pizarrón. Si la tarea es individual, sugerir la elección de ciudades alejadas, pues en las cercanas será difícil dar un margen de error aceptable.

29. Llamando p al primer número, el tercero es

3p y el segundo es $\frac{1}{4} \cdot 3p$

$p + \frac{3}{4} \cdot p + 3p = \frac{19}{4} \cdot p = 228.000$, entonces,

p = 48.000
El tercero es 144.000 y el segundo, 36.000.

30. a. Índice de variación: 1,25 : 0,60 = 2,083...
b. Litros anuales: 15000 x 12 = 18.000 litros.
Gasto anual antes del aumento:
18.000 x 0,60 = 10.800.
Gasto después del aumento:
10.800 x 2,083… = 22.500.

31. En la jarra, hay un 80% de agua: 0,4 litros de agua en medio litro. Después del agregado: 0,65 litros en 0,75 litros. Porcentaje actual de agua: 0,65 : 0,75 = 0,866, o sea, 86,6% de agua.

32. a. El lado es de aproximadamente 16 cm.
b. La arista es de aproximadamente 12 cm.

33. Se sugiere acordar qué representa en cada caso una estimación.

34. Sí. El radio del mantel será a lo sumo de 0,75cm, luego, el perímetro será de
P = 0,75 x p x 2 = 4,71 m a lo sumo.

T. P. Nº 7 | Lugar geométrico

1. a. La casa de Julio está a 22 cuadras de la casa de Ferny. Si tomamos como referencia la calle perpendicular a la de ambos, a 11 cuadras de cada casa, los que están a la izquierda de esa calle están más cerca de la casa de Julio y los restantes están más cerca de la casa de Ferny.
b. En la calle perpendicular a la casa de ambos, a 11 cuadras de la casa de cada uno, no hay bares. Entonces no hay bares que cumplan la condición exigida por los dos amigos.
c. Los puntos deben ubicarse en la perpendicular a la calle de ambos y a 11 cuadras de sus casas.

2. a. No es necesario que se respeten las medidas de las espirales originales. Lo importante es la búsqueda de estrategias que permitan la reproducción para avanzar con algunas características de las formas circulares.
b. Espiral 1: Sobre una recta trazar una semicircunferencia. Con el compás tomar la medida del diámetro y, apoyándolo en un extremo de la semicircunferenci, trazar otra con la nueva medida en el semiplano opuesto. Repetir estos pasos dos veces más.
Espiral 2: Construir el cuadrado central y prolongar sus lados como se observa en la figura. Con centro en uno de los vértices del cuadrado y tomando como radio la longitud del lado del cuadrado, trazar un cuarto de circunferencia. Hacer centro en el vértice consecutivo del cuadrado, siguiendo el sentido de las agujas del reloj, y tomar como radio el doble de la longitud del lado del cuadrado; trazar otro cuarto de circunferencia. Continuar el procedimiento tomando los vértices que siguen en el orden establecido. En cada caso, tomar por radio el triple, el cuádruple y así sucesivamente.

3. Trazar una recta r; sobre r marcar un punto P; trazar un arco de circunferencia con centro P y radio MN. En la intersección de la recta r con el arco de circunferencia trazado, se marca un punto Q. Queda determinado el segmento PQ congruente con el segmento MN.

4. Es correcto, porque se puede construir el cuadrilátero ACBD, que es rombo por tener todos sus lados congruentes. Sus diagonales CD y AB se cortan mutuamente en partes congruentes. El punto de intersección entre CD y AB es punto medio de ambos segmentos. Además, las diagonales del rombo son perpendiculares; entonces, AB es perpendicular a CD. Este procedimiento puede ser utilizado para justificar algunos de los ejercicio que siguen.

5. a y b. Tadeo traza el segmento determinado por los puntos que representan las casas de Matías y Agustín. Con el compás y haciendo centro en la casa de Matías, traza una circunferencia; con el mismo radio traza otra circunferencia, esta vez haciendo centro en la casa de Agustín. Ambas circunferencias deben cortarse en dos puntos. Si no es así, toma un radio mayor que permita encontrar dos puntos de intersección. Al unir estos puntos, queda formada la recta cuyos puntos equidistan de las casas de Agustín y Matías. Se trata de la mediatriz del segmento en cuyos extremos se ubican las casas de estos dos amigos.

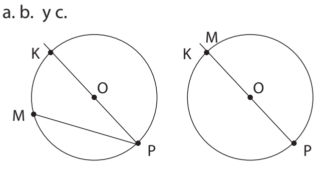
6. a. Se realiza el plano en una hoja. Se acuerda que cada cuadra mide 100 m (en la representación, 1 cm). Representar la intendencia con el punto I y el monumento, con M.

b. Se traza la circunferencia con centro en I y radio de 2 cm. Cualquier punto que en la representación esté sobre la circunferencia, en la ciudad estará a 200 m de la intendencia.
c. Se trazan dos rectas paralelas a la recta que representa la Av. del Campo: una, 3 cm a la izquierda de dicha recta y la otra, 3 cm a la derecha de la misma recta. El lugar geométrico de los puntos que están a la izquierda de la primera recta y a la derecha de la segunda recta en la representación, en la ciudad están a más de 300 m de la Av. del Campo.
d. Se trazan dos circunferencias con centros en los puntos I y M, respectivamente, ambas con radio de 2 cm. Los puntos del plano exteriores a ambas se encuentran en la ciudad a más de 200 m de la intendencia y del monumento.

7. Episodio 7
Se considera la escala del mapa: 6,5 mm representan 2 km. Se trazan circunferencias de 19,5 mm de radio con centro en cada uno de los puntos que representan los edificios, y segmentos paralelos a los lados del triángulo a 6,5 mm a la izquierda y la derecha de éstos. Las budineras se ubicarán en los puntos exteriores a las circunferencias y sobre los segmentos.

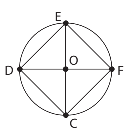
8. a. Se traza una semirrecta con origen en A que corte a ambos arcos. La longitud de los segmentos determinados por A y las intersecciones de las semirrectas con las circunferencias son las longitudes de los radios de ambas circunferencias.
b. Puntos del plano cuya distancia al punto A es mayor que 3 cm y menor que 5 cm.

9. a. b. y c.



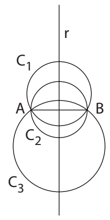
d. K pertenece siempre al arco mayor que determinan los puntos M y P. Si P y M están diametralmente opuestos, K coincide con M.

10. a. b. y c.



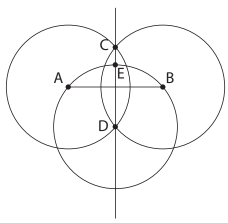
d. Un cuadrilátero. Sus diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes: es paralelogramo. Sus diagonales son perpendiculares: es rombo. Sus diagonales son congruentes: es rectángulo. El paralelogramo que cumple ambas condiciones es un cuadrado, único, con diagonales de 5 cm.
Se justifica igual que el ejercicio 4.

11.



12. Se consideran dos circunferencias de centro O y O', y radio r y r', respectivamente. I. Se ubican flores en los puntos del jardín cuya distancia a O sea menor que r o en los puntos cuya distancia a O' sea menor que r'. II. En los puntos del jardín cuya distancia a O sea menor que r o en los puntos cuya distancia a O sea mayor que r'. III. En los puntos del jardín cuya distancia a O sea menor que r y cuya distancia a O' sea menor que r'. IV. En los puntos del jardín cuya distancia a O sea menor que r y cuya distancia a O' sea mayor que r'.

13. a.

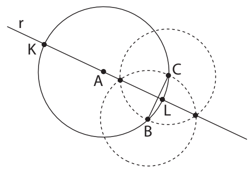


b. Se pueden encontrar infinitas circunferencias. No se puede determinar la de mayor radio. La circunferencia con centro en el punto medio del segmento que determinan los puntos marcados.

14. Si se hace coincidir la punta seca del compás con el centro de la circunferencia que se desea trazar, la otra punta permite "barrer" el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, el centro de la circunferencia.

15. Se trazan dos cuerdas cualesquiera no paralelas entre sí. Con el procedimiento del problema 4, se trazan las rectas perpendiculares a las cuerdas por sus puntos medios. Quedan determinados dos diámetros de la circunferencia. En el punto común a ambos diámetros, está el centro de la circunferencia. La medida del radio es la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia.

16. a.

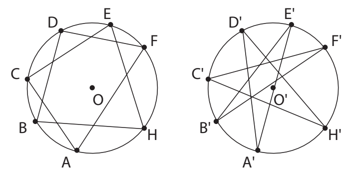


b. Marcar dos cuerdas en el arco dibujado y trazar sus perpendiculares por el punto medio con el procedimiento del problema 4. Determinar el punto común a ambas rectas: es el centro de la circunferencia buscada. Determinar su radio: es la distancia entre el centro y cualquier punto del arco dibujado. Con el centro y el radio, se completa la circunferencia.

17. Son paralelas.

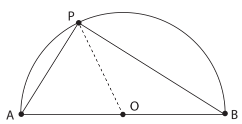
18. Se sugiere hacer un esquema para cada situación. Sombrear con diferentes colores la zona iluminada por cada reflector. Donde se superponen los sombreados, están los puntos iluminados simultáneamente por más de un reflector.

19. a.



b. Estrellada.
c. Si se superponen las figuras obtenidas, se observa que cada ángulo interior de la segunda figura es aproximadamente la tercera parte de cada ángulo interior de la primera figura. Resulta 540° : 3 = 180° aproximadamente.

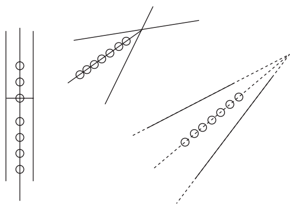
20.



a. APB es un ángulo recto. Si se completa la circunferencia y se prolonga el radio OP, queda determinado un paralelogramo cuyos vértices, A, P, B y Q, pertenecen a la circunferencia. Se trata de un paralelogramo porque sus diagonales se cortan en su punto medio (ver problema 10). Además, sus diagonales son congruentes; entonces, el paralelogramo es rectángulo.

21. Las varillas están sobre una mesa. Si no se tocan, las monedas se ubican en posiciones de la mesa entre las dos varillas y a igual distan-

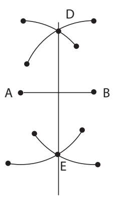
cia de ambas. Las monedas quedan alineadas. Si las varillas se tocan, será en cualquier punto. Las monedas se podrán ubicar en el punto común a las dos varillas o en cualquier otro sobre una línea imaginaria en el espacio entre las varillas y a la misma distancia de ambas.



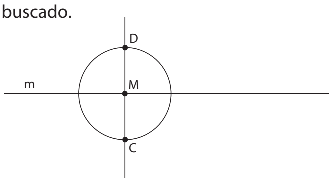
22. b. Los puntos pertenecen a una recta perpendicular al segmento por su punto medio.

23. a. Por el punto medio del segmento AB. Se trata de la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles. Es perpendicular a la base por su punto medio.
b. No. En cualquier triángulo, el punto medio de la base no pertenece a la altura.

24.



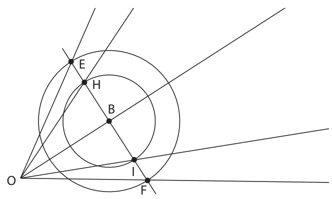
25. Se traza por C una perpendicular a la recta m. Se determina M en la intersección de la recta trazada y m. Con centro en M y radio MC, se traza una circunferencia que tiene intersección con la recta CM en D, punto buscado.



26. Si el radio no es mayor que la mitad del segmento AB, las circunferencias no tienen intersección y no quedan determinados puntos equidistantes de A y de B.

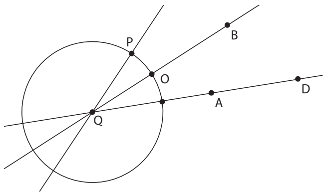
27. Se sugiere trabajar en papel liso. La actividad apunta a la aplicación del procedimiento aprendido.

28.



No es único. Basta con construir cualquier semirrecta con origen en O y, por plegado o con compás, determinar la simétrica respecto de la semirrecta OB.

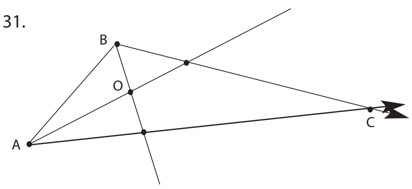
29.



Se trazan las rectas OB y AD. En el punto de intersección Q, está el vértice del ángulo. Si se traza una circunferencia con radio QO, queda determinado M en la intersección de dicha circunferencia y la recta AD. Con el compás y la medida del arco OM, se traza OP. La semirrecta QP es el otro lado del ángulo.

30. Se traza la bisectriz del ángulo ∫ y se obtienen dos ángulos con una amplitud igual a la mitad de la amplitud ∫. Se traza la bisectriz de uno de estos ángulos, obteniendo ángulos cuya amplitud es $\frac{1}{4}$B.

31.

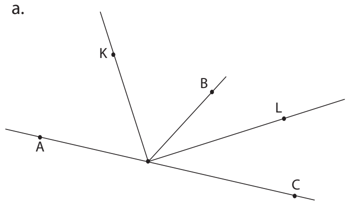


Es única. C es la intersección de BP con AQ.

32. Verdadera. La Justificación debe hacer uso de las definiciones de bisectriz y mediatriz.

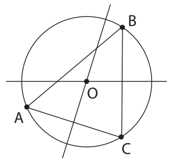
33. En general, las primeras afirmaciones que realizan los alumnos son meras modificaciones de las definiciones de bisectriz y mediatriz, como lugar geométrico.
Después de discutirlas, se puede sugerir el trabajo con una figura en particular, por ejemplo paralelogramos, para fomentar la formulación de conjeturas sobre propiedades que cumplen los distintos lugares geométricos estudiados.

34. a.

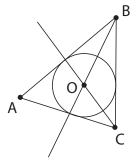


b. Sí, sus bisectrices determinan un ángulo recto. Cada bisectriz determina dos ángulos de amplitud igual a la mitad de la amplitud de los ángulos dados.
c. La justificación anterior es válida para cualquier ángulo.

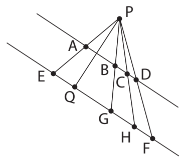
35. a.



b.



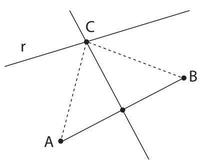
36. a.



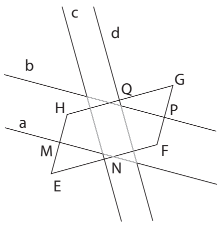
b. Una recta paralela a la recta x.
c. Se pueden tomar puntos equidistantes del marcado sobre la recta x. Uniendo con P, se forma un triángulo isósceles. Los puntos medios también determinan con P un triángulo isósceles. El segmento señalado con línea punteada resulta ser la altura de dichos triángulos isósceles; por lo tanto, es perpendicular a sus bases. Dos rectas perpendiculares a una tercera resultan paralelas entre sí (ver problema 17).

37. b. Es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia a otro punto es menor o igual que una distancia r.

38.

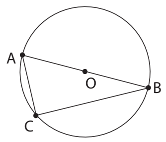


39. a.



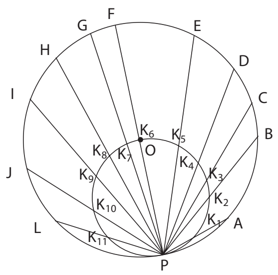
b. Las mediatrices de lados opuestos resultan paralelas. Las mediatrices se cortan dos a dos determinando otro paralelogramo.

40. a.



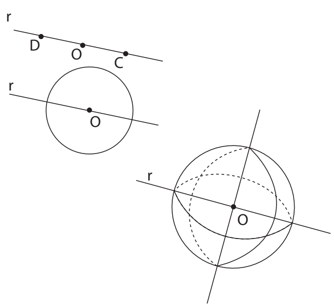
b. Circunscripta.

41. a.



b. Pertenecen a una circunferencia.

42.

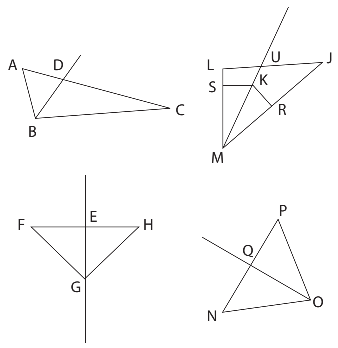


43. a. Sí. Una recta y un punto no perteneciente a la recta determinan un plano.
b. Sí. Es suficiente considerar una de las rectas y un punto perteneciente a la otra recta y distinto del punto común, y se tiene el caso a.
c. Sí, si son paralelas. No, si son alabeadas (no pertenecientes a un plano).

44. Ninguno, si es paralela a cualquier recta del plano.
Uno, si corta a alguna recta del plano.

45. Infinitas rectas. En un plano, también infinitas rectas. Por una recta, pasan infinitos planos y, por un punto, pasan infinitos planos.

46. Se puede sugerir que realicen construcciones para conjeturar.



No. Basta con mostrar un contraejemplo (ver construcción).

- Sí, por noción de distancia.
- Sí, por definición de mediana y mediatriz.
- Sí, por definición de altura y bisectriz.

47. a. Si se considera la esfera, la intersección es un círculo; con la superficie esférica, la intersección es una circunferencia.
b. Al igual que en **a.** la intersección con la esfera es un círculo y con la superficie esférica, una circunferencia. Sin embargo, el radio es menor si el plano pasa por el centro.

48. a. Las intersecciones de la esfera con planos que pasan por el centro son círculos máximos.
b. Infinitos. Todos tienen el mismo radio.
c. Iguales.

49. a. y b. Observando un planisferio y un globo terráqueo, se sugiere discutir similitudes y diferencias entre paralelos y meridianos en ambas representaciones.

50. Se puede desarrollar en colaboración con el área de Ciencias Sociales.

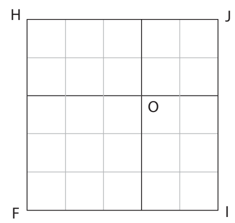
51. Se sugiere realizar la actividad en una esfera de telgopor, cortando por un círculo máximo.

T. P. Nº 8 | Relaciones entre datos

1. a. El tamaño del fémur del hombre se encuentra entre 420 mm y 430 mm. El de la mujer, entre 380 mm y 420 mm. Mayor calidad de vida corresponde a mayor altura media de la población. Mayor altura media corresponde a personas con fémur más grande. Entonces, los que tienen fémur de mayor tamaño son los que tienen mayor calidad de vida.
b. En el primer período, porque la diferencia entre el tamaño del fémur de ambos era menor.

2. b. No, pues en la primera se encuestó a 1700 personas; en la segunda, no se puede saber pues sólo da porcentajes; en la tercera, se encuestó a 1750 personas.
c. 255 es el 15% de 1700. La persona leyó la primera encuesta.
d. Conviene promover en los alumnos tanto la formulación de preguntas cuya respuesta es directa, así como la lectura indirecta de información.

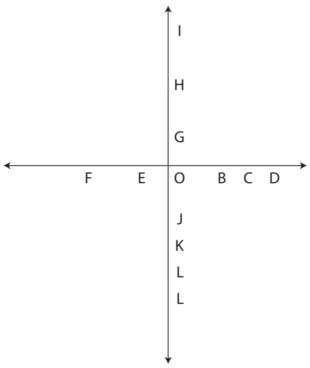
3.



Se dibuja un cuadrado de 5 cm de lado, al que se nombra FIJH; se hace una grilla y se toma 1 cm como unidad. Se considera el origen de la grilla en el vértice F. El punto O por identificar está a 3 cm del eje horizontal y a 3 cm del eje vertical.

4. a. M, Alicia; P, José; O, Guillermo; N, Rosa; Q, Roberto.
b. Guillermo en bicicleta y Alicia en auto.
c. Para responder al ítem a., es suficiente observar las distancias de la casa de cada uno al trabajo. Para responder al ítem b., se puede comparar la distancia recorrida y el tiempo empleado por Roberto con la distancia recorrida y el tiempo empleado por Guillermo. En forma análoga, se puede comparar la distancia recorrida y el tiempo empleado por José y Alicia, respectivamente. En ambos casos, sus casas están casi a la misma distancia del trabajo y los tiempos empleados son significativamente diferentes.

5. a. En la comparación, se espera que surja la arbitrariedad del sistema de referencia.
b. Los puntos ubicados sobre el eje de las abscisas tienen ordenada 0; y los puntos ubicados sobre el eje de las ordenadas tienen abscisa 0.
Los puntos F, E, O, B, C y D tienen ordenada 0. Los puntos M, L, K, J, O, G, H e I tienen abscisa 0.



6. a. C (6; 4) y D (6; 7)
b. C (6; –2) y D (8; 0)
c. La construcción del cuadrado y del rectángulo, en un sistema de ejes coordenados, sirve para analizar las respuestas. En a., se pueden trazar dos cuadrados diferentes. En b., se pueden trazar infinitos rectángulos.
d. P (3; 4), Q (7; 3), R (6; 7) y S (2; 8)

7. a. La gráfica representa la velocidad según la posición (distancia al punto de partida); entonces, a 200 m del punto de partida, alcanzó una velocidad de 150 km/h.
b. A 600 m del punto de partida, alcanza una velocidad de 200 km/h; a 150 m, una velocidad de 140 km/h y a 750m del punto de partida alcanza la mayor velocidad.
c. Sí, porque después de alcanzar la velocidad máxima baja la velocidad en forma significativa.

8. a. A la salida, 25 litros. A la llegada, 40 litros.
b. En el km 350, tenía 10 litros de nafta. En el km 100 y en el km 400, tenía 40 litros.
c. Cargó nafta dos veces en el viaje. En el km 100, aproximadamente, 25 litros y en el km 350, aproximadamente, 35 litros.
d. ¿Cuánta nafta quedaba en el tanque en el km 50? Hay otras preguntas posibles. Por ejemplo: en el km 350, en el tanque había menos litros que a la salida. ¿Cuántos litros menos?

9. a. En el problema 7, sí, pues para cada distancia desde el punto de partida, corresponde una única velocidad.
b. En el problema 8, no, pues en los kilómetros en que el auto cargó nafta no es posible contestar dando un sólo valor a cada posición respecto de la salida; corresponde una única cantidad de litros de nafta en el tanque.
c. Será conveniente la producción de preguntas que lleven a leer datos en el eje de las abscisas y de las ordenadas, que lleven a comparar datos, que tengan una, más de una repuesta o ninguna.

10. Gráfico 1: sí. Recorre la misma distancia y tarda más tiempo a la vuelta que a la ida. Gráfico 2: no. Sucede a la inversa.

11. a. El salario de María en el año 1999 era de $600; el de Carlos, de $400.
b. El aumento fue de $50.
c. Entre 1990 y 1992. Entre 1996 y mediados de 1997.
d. María ganaba $400 entre 1993 y 1996. Carlos ganaba $300 a mediados de 1991. En 1992, María y Carlos ganaban lo mismo. A partir de 1997, María ganaba más de $500.

12. Para responder resulta conveniente realizar una gráfica cartesiana. En función de los datos, resulta más simple usar una hoja milimetrada.
Es importante tener en cuenta que se trata de los gráficos de puntos cuyas abscisas son números naturales pues las pulidoras no cobran fracción de m^2. De acuerdo con los precios, las ordenadas de los puntos también son números naturales. Se comprueba que el punto de intersección de ambos gráficos tiene de coordenadas (26,182), es decir, ambas pulieron 26 m^2 de piso.
Para menos de 26m^2, conviene la pulidora A; para 26m^2, ambas pulidoras cobran lo mismo; para más de 26m^2, conviene la pulidora B.

13. Episodio 8
La fragua 1 funde 70 litros de aluminio por minuto. La humana no tiene razón, pues la fragua 1 funciona correctamente.

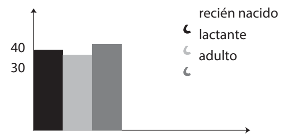
14. En el problema 12, lo que cobra la pulidora A depende de la superficie que se va a pulir en una relación de proporcionalidad directa. En el problema 13, en la fragua 1, la cantidad de aluminio fundido depende del tiempo transcurrido en relación de proporcionalidad directa.

15. a. Tabla 1: x = 6; y = 16; 128.
Tabla 2: x = 108; y = 4,25; 25. La tabla 3 no puede completarse. Tabla 4: x no puede completarse; y = 300; 27,27 y 6,67.
b. Tabla 1: no es de proporcionalidad. Con los datos se puede completar la tabla.
Tabla 2: proporcionalidad directa. La constante de proporcionalidad es k = 0,05.
Tabla 3: no es de proporcionalidad. Datos insuficiente para completar la tabla.
Tabla 4: es de proporcionalidad inversa. Las personas no pueden haber pagado $5,5 cada una porque el número de personas debe ser un número natural y 300 : 5,5 no lo es.
c. y = 0,05 x con la tabla 2; $y = \frac{300}{x}$ con la tabla 4.

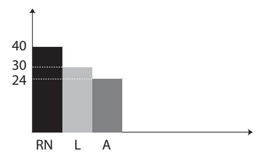
16. a. Gráfica 1: no. Gráfica 2: sí. Situación de proporcionalidad directa. Gráfica 3: sí. Situación de proporcionalidad inversa.
b. Gráfica 2: y = 2x. Gráfica 3: $y = \frac{48}{x}$

17. a. El porcentaje de agua extracelular.
b. Del mismo modo, se representa la cantidad de agua extracelular a medida que aumenta la edad.

Porcentaje de agua intracelular

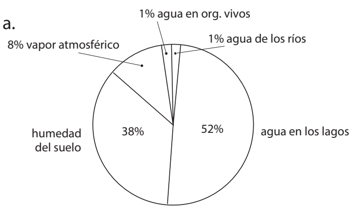


Porcentaje de agua extracelular



18. No. Según la gráfica, el costo de vida aumentó todos los meses con respecto al mes anterior.

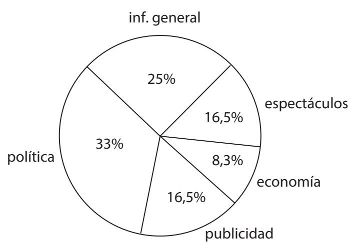
19. a.



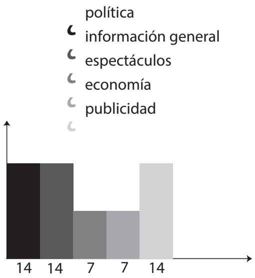
b. 1% del 1% del 3% del total.
La fracción que representa el agua de los ríos es $\frac{1}{3000000}$.

No resultaría adecuado, pues no es posible representar una fracción tan pequeña.

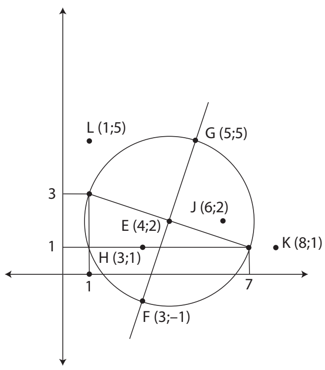
20. Diario 1
Este diario puede publicitarse destacando que la tercera parte está dedicada a la política.En un gráfico circular, se señala la sección de política separada del resto.



Diario 2:
Este diario puede publicita destacando que 14 páginas están dedicados a la política. En un gráfico de barras, se muestra el porcentaje total entre política y economía.



21. b. El punto medio se puede obtener por trazado de mediatriz. Es el punto E (4; 2).



c. Los puntos G y F son comunes a la mediatriz y a la circunferencia.
d. H y J son puntos interiores; K y L son puntos exteriores.

22. a. A(–3; 3), B(2; –1), C(–3; –3), M(6; 1), N(10; 3), P(11; –2), Q(8; –2)
b. A'(3; 3), B'(–2; –1), C'(3; –3), M'(–6; 1), N'(–10; 3), P'(–11; –2), Q'(–8; –2)

23. La segunda. La presión baja a medida que transcurre el tiempo y tiende a estabilizarse.

24. a. El precio de la harina en abril de 2003 era de $0,98.
b. El precio en diciembre de 2001 habrá sido de $1,82.

25. a. La gráfica 1 corresponde a un lugar donde a principios de año la temperatura desciende (invierno), luego asciende (primavera-verano), vuelve a descender (otoño) y toma nuevamente el valor inicial al comienzo del año siguiente. La gráfica 2 no puede corresponder a la evolución de la temperatura a lo largo del año. La gráfica 3 corresponde a un lugar ubicado en el hemisferio contrario al primero respecto del ecuador. La gráfica 4 corresponde a una temperatura constante a lo largo del año.
b. La segunda no. No vuelve a la temperatura inicial al finalizar el año. La cuarta tampoco, pues es imposible que en un determinado lugar no haya variaciones de temperatura máxima.
c. Las gráficas 1 y 3 corresponden a lugares diametralmente opuestos.

26. a. Ayelén habló menos tiempo y pagó más.
b. Leandro habló más por un costo menor.
c. Leandro habló mucho más que el resto con un costo mucho menor en relación con la duración de la llamada. Puede ser que haya realizado una llamada local. En ese caso, Gustavo realizó la llamada a la ciudad más cercana.
d. Si se supone que Leandro realizó la llamada local, otros puntos que representen llamadas locales serán puntos de la semirrecta con origen en el eje de coordenadas y que pase por el punto que representa la llamada de Leandro.
e. Todos los puntos de la semirrecta indicada en d.

27. La curva de abajo corresponde al peso de Paula en función del tiempo.

28. No, porque la distancia de A a C es distinta de la distancia de B a C.
Es importante ubicar A, B, y C en el eje de las ordenadas.

29. a. La longitud de la circunferencia es directamente proporcional al radio.
■ El área de un círculo no es proporcional al radio.
■ La medida de la altura de un triángulo es inversamente proporcional a la medida de la base si el área es constante.
b. $L = 2\pi r$, siendo r el radio y L, la longitud de la circunferencia, 2π es la constante de proporcionalidad.
■ $A = \pi r^2$ no es función de proporcionalidad
■ $A = \frac{(b \times h)}{2}$, entonces, siendo el área 4
■ $h = \frac{8}{b}$ (h: altura, b: base, 8: constante de proporcionalidad).

30. a. Se puede mostrar la conveniencia de trabajar por ensayo y error en forma ordenada. Se varía primero b y se deja a fijo: el resultado aumenta con el aumento de b. Luego se deja b fijo y se varía a: se observa que el resultado no cambia, es decir, no depende de a.

a	b	a x b	(a + 7) x b	(a + 7) x b – a x b
100	1000	1000000	107000	7000
100	2000	2000000	214000	14000
300	2000	600000	614000	14000
100	2999	299900	320893	20993

b. El resultado depende sólo de b : (a + 7) x b – a x b = ~~a b~~ + 7 b – ~~a b~~ =7b. Se deberá elegir b lo más grande posible, es decir, 2999.