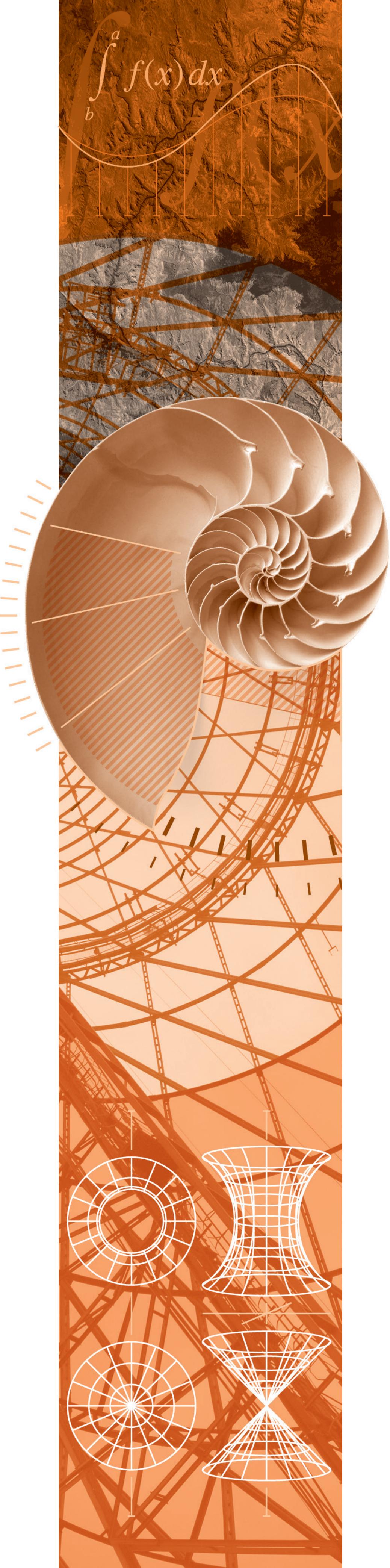


serie enfoques

Matemática III

Argumentación y formalización de los conocimientos

Liliana Edith Kurzrok
Claudia Comparatore
Silvia Altman

longseller
EDUCACIÓN

Coordinación editorial
Beatriz Grinberg

Corrección
Judith Jamschon

Diseño y diagramación
Pablo Balcells

Edición
Rosana Sandler
Mariel Mambretti

Autores
Liliana Edith Kurzrok
Claudia Comparatore
Silvia Altman

Fotografía
Archivo Longseller

Blanco Encalada 2388
(C1428DDL) CABA Argentina
(011) 4706-1235 / 3647
promocion@longseller.com.ar

www.longseller.com.ar

Esta edición se terminó de imprimir en Triñanes gráfica, Buenos Aires, Argentina, en el mes de enero de 2013.

1º edición

Kurzrok, Liliana Edith
Matemática III / Liliana Edith Kurzrok ; Claudia Rita Comparatore ; Silvia Viviana Altman. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Longseller, 2012.
224 p. ; 28x20 cm. - (Enfoques)

ISBN 978-987-683-115-4

1. Matemática. 2. Enseñanza Primaria. I. Comparatore, Claudia Rita II. Altman, Silvia Viviana
CDD 372.7

Capítulo 5

El concepto de límite

Capítulo 6

Cálculo de límites

Capítulo 7

Derivadas

Capítulo 8

Estudio de funciones sencillas

Capítulo 9

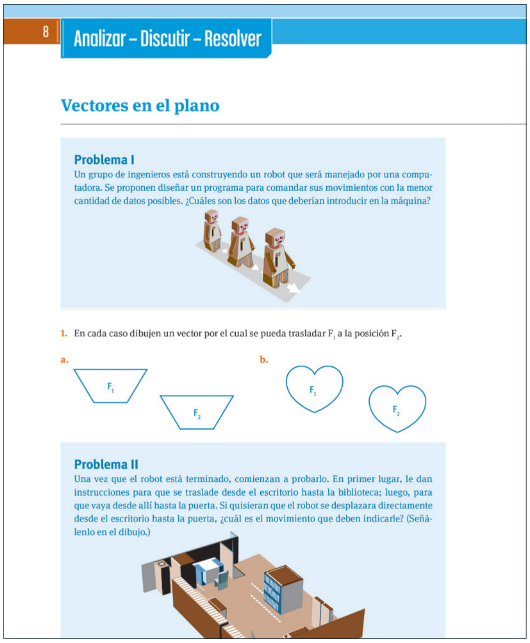
Integrales

Capítulo 10

Probabilidad y estadística

Cómo es este libro

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER



8 Analizar – Discutir – Resolver

Vectores en el plano

Problema I
Un grupo de ingenieros está construyendo un robot que será manejado por una computadora. Se proponen diseñar un programa para comandar sus movimientos con la menor cantidad de datos posibles. ¿Cuáles son los datos que deberían introducir en la máquina?

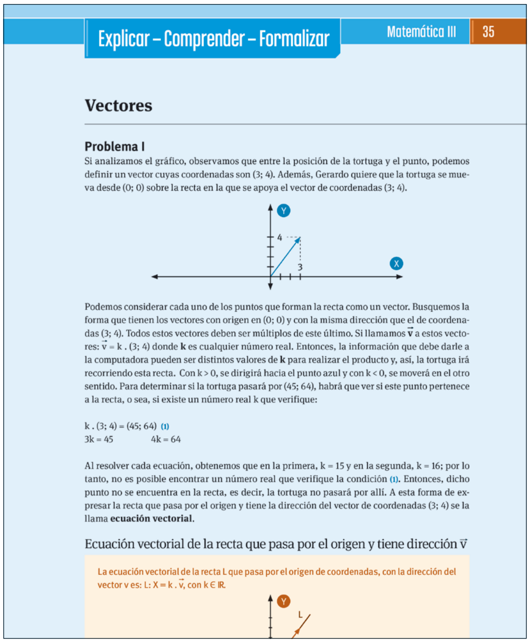
1. En cada caso dibujen un vector por el cual se pueda trasladar F_1 a la posición F_2.

a. b.

Problema II
Una vez que el robot está terminado, comienzan a probarlo. En primer lugar, le dan instrucciones para que se traslade desde el escritorio hasta la biblioteca; luego, para que vaya desde allí hasta la puerta. Si quisieran que el robot se desplazara directamente desde el escritorio hasta la puerta, ¿cuál es el movimiento que deben indicarle? (Señálenlo en el dibujo.)

Problemas para introducir los contenidos y trabajar los posibles caminos de resolución.

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR



Explicar – Comprender – Formalizar Matemática III 35

Vectores

Problema I
Si analizamos el gráfico, observamos que entre la posición de la tortuga y el punto, podemos definir un vector cuyas coordenadas son (3; 4). Además, Gerardo quiere que la tortuga se mueva desde (0; 0) sobre la recta en la que se apoya el vector de coordenadas (3; 4).

Podemos considerar cada uno de los puntos que forman la recta como un vector. Busquemos la forma que tienen los vectores con origen en (0; 0) y con la misma dirección que el de coordenadas (3; 4). Todos estos vectores deben ser múltiplos de este último. Si llamamos $\vec{v}$ a estos vectores: $\vec{v} = k \cdot (3; 4)$ donde **k** es cualquier número real. Entonces, la información que debe darle a la computadora pueden ser distintos valores de **k** para realizar el producto y, así, la tortuga irá recorriendo esta recta. Con $k > 0$, se dirigirá hacia el punto azul y con $k < 0$, se moverá en el otro sentido. Para determinar si la tortuga pasará por (45; 64), habrá que ver si este punto pertenece a la recta, o sea, si existe un número real k que verifique:

$k \cdot (3; 4) = (45; 64)$ (1)
$3k = 45$ $4k = 64$

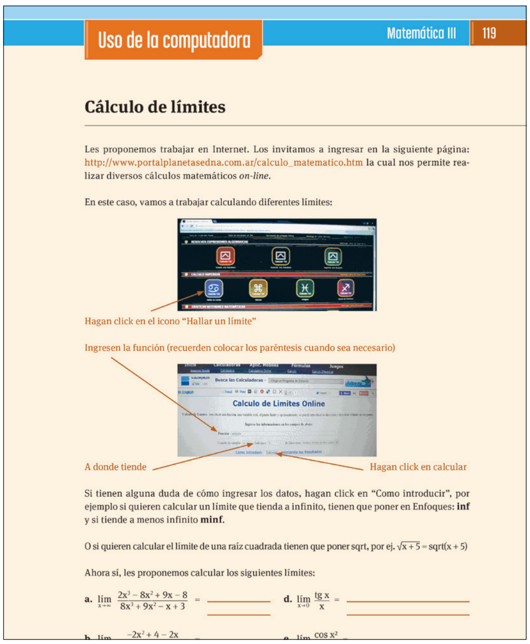
Al resolver cada ecuación, obtenemos que en la primera, $k = 15$ y en la segunda, $k = 16$; por lo tanto, no es posible encontrar un número real que verifique la condición (1). Entonces, dicho punto no se encuentra en la recta, es decir, la tortuga no pasará por allí. A esta forma de expresar la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector de coordenadas (3; 4) se la llama **ecuación vectorial**.

Ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen y tiene dirección $\vec{v}$

La ecuación vectorial de la recta L que pasa por el origen de coordenadas, con la dirección del vector v es: $L: X = k \cdot \vec{v}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Contenidos, conceptos teóricos y modelos explicativos a partir de los problemas centrales.

USO DE LA COMPUTADORA



Uso de la computadora Matemática III 119

Cálculo de límites

Les proponemos trabajar en Internet. Los invitamos a ingresar en la siguiente página: http://www.portalplanetasedna.com.ar/calculo_matematico.htm la cual nos permite realizar diversos cálculos matemáticos *on-line*.

En este caso, vamos a trabajar calculando diferentes límites:

Hagan click en el icono "Hallar un límite"

Ingresen la función (recuerden colocar los paréntesis cuando sea necesario)

Calculo de Limites Online

A donde tiende

Hagan click en calcular

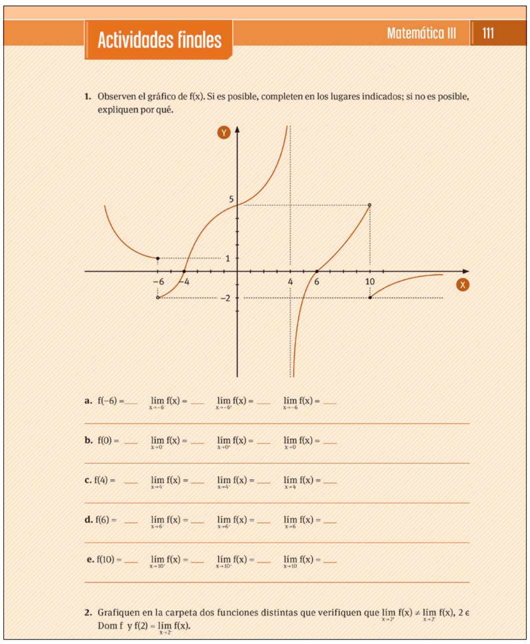
Si tienen alguna duda de cómo ingresar los datos, hagan click en "Como introducir", por ejemplo si quieren calcular un límite que tienda a infinito, tienen que poner en Enfoques: **inf** y si tiende a menos infinito **minf**.

O si quieren calcular el límite de una raíz cuadrada tienen que poner sqrt, por ej. $\sqrt{x+5}$ = sqrt(x + 5)

Ahora sí, les proponemos calcular los siguientes límites:

Introducción al uso de las nuevas tecnologías y su aplicación en el campo de la matemática.

ACTIVIDADES FINALES



Actividades finales Matemática III 111

1. Observen el gráfico de f(x). Si es posible, completen en los lugares indicados; si no es posible, expliquen por qué.

a. $f(-6) =$ __ $\lim_{x \to -6^-} f(x) =$ __ $\lim_{x \to -6^+} f(x) =$ __ $\lim_{x \to -6} f(x) =$ __

b. $f(0) =$ __ $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 0} f(x) =$ __

c. $f(4) =$ __ $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 4^+} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 4} f(x) =$ __

d. $f(6) =$ __ $\lim_{x \to 6^-} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 6^+} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 6} f(x) =$ __

e. $f(10) =$ __ $\lim_{x \to 10^-} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 10^+} f(x) =$ __ $\lim_{x \to 10} f(x) =$ __

2. Grafiquen en la carpeta dos funciones distintas que verifiquen que $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$, $2 \in$ Dom f y $f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Actividades orientadas a poner en juego los conocimientos adquiridos a lo largo del capítulo.

1

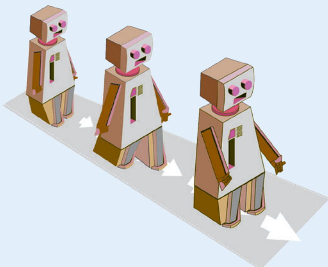
Vectores

Cuando en Física se debe identificar una fuerza, es necesario indicar de cuánto es y hacia dónde va. En este capítulo, veremos cómo se define matemáticamente este tipo de información.

Vectores en el plano

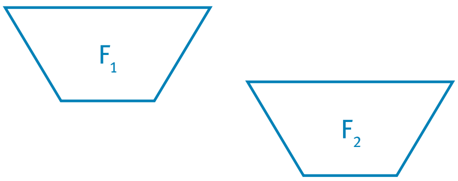
Problema I

Un grupo de ingenieros está construyendo un robot que será manejado por una computadora. Se proponen diseñar un programa para comandar sus movimientos con la menor cantidad de datos posibles. ¿Cuáles son los datos que deberían introducir en la máquina?

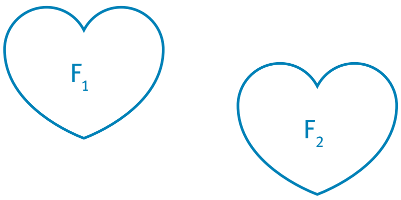


1. En cada caso, dibujen un vector por el cual se pueda trasladar F_1 a la posición F_2.

a.

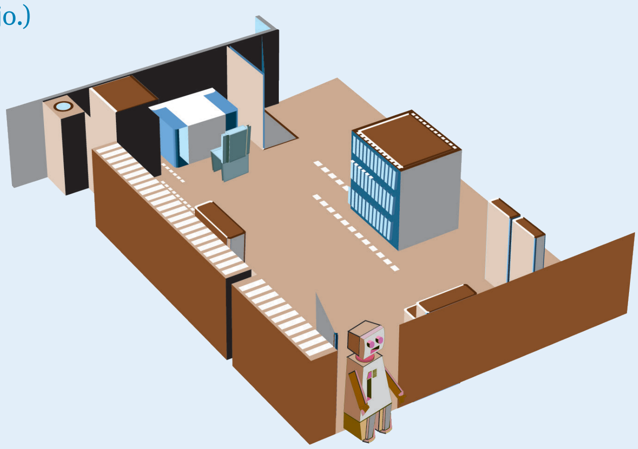


b.



Problema II

Una vez que el robot está terminado, comienzan a probarlo. En primer lugar, le dan instrucciones para que se traslade desde el escritorio hasta la biblioteca; luego, para que vaya desde allí hasta la puerta. Si quisieran que el robot se desplazara directamente desde el escritorio hasta la puerta, ¿cuál es el movimiento que deben indicarle? (Señálenlo en el dibujo.)



2. Dibujen un vector equivalente a $\overrightarrow{AB}$:

3. Dibujen un vector opuesto a $\overrightarrow{CD}$:

4. Dibujen un vector paralelo a $\overrightarrow{MN}$, que no sea equivalente a él.

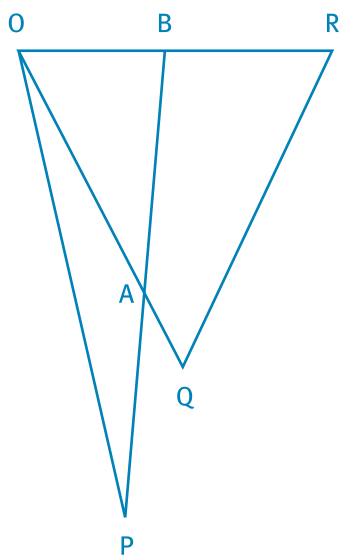
5. Dados los puntos M = (1; 3), N = (3; 7), P = (5; 1) y Q = (2; 6), determinen, sin representarlos gráficamente, si los siguientes vectores son equivalentes:

a. $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{NQ}$

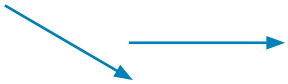
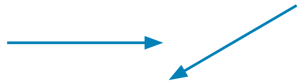
b. $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$

6. Sabiendo que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\,\vec{a}$, $\overrightarrow{BR} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{AP} = 2\,\overrightarrow{BA}$, expresen los siguientes vectores en función de **a** y **b**:

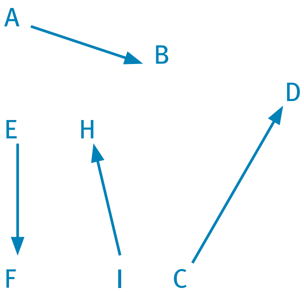
a. $\overrightarrow{BA}$
b. $\overrightarrow{BP}$
c. $\overrightarrow{RQ}$
d. $\overrightarrow{QA}$



7. Hallen el vector suma en cada uno de los siguientes casos:

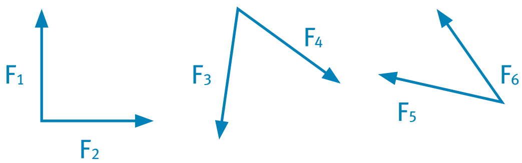
a.  b.  c. 

8. Consideren los siguientes vectores:



Grafiquen:
a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IH}$
b. $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF}$
c. $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{IH}$

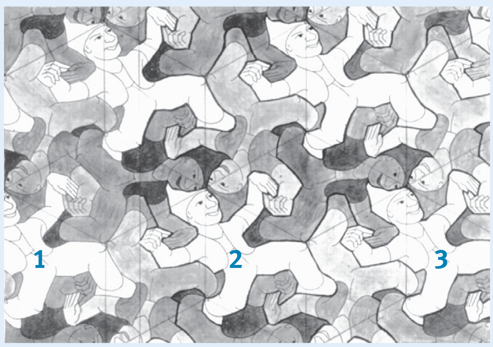
9. Hallen la resultante (suma) de los siguientes pares de fuerzas:



Problema III

Observen esta obra de Escher, en la que aparece una figura repetida varias veces. Indiquen qué movimientos permiten pasar de la figura:

a. 1 a la 2.
b. 2 a la 3.
c. 1 a la 3.



10. Dados los puntos A, B y C, hallen gráficamente:

a. $2\,\overrightarrow{AB}$
b. $-1\,\overrightarrow{BC}$
c. $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$

A ×

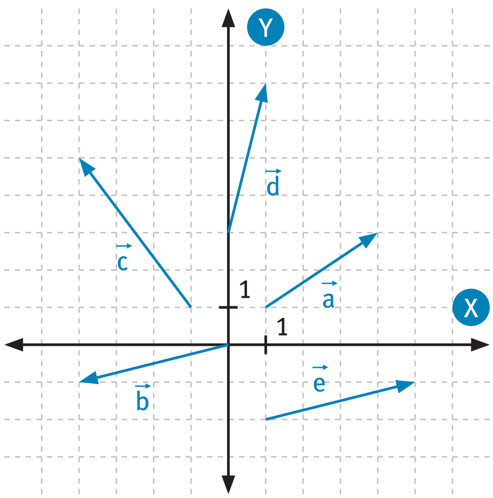
B ×

C ×

Problema IV

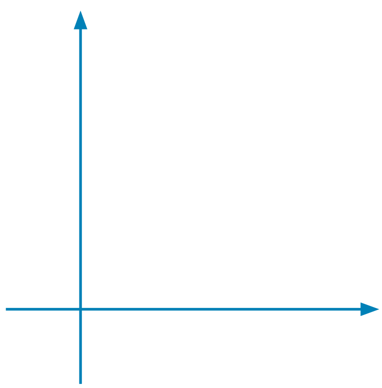
Volvamos a los ingenieros que construyen el robot. ¿Cómo se le puede indicar a la computadora cuál es la dirección, el sentido y el módulo del vector que define cada movimiento?

11. Escriban las coordenadas cartesianas de los siguientes vectores:

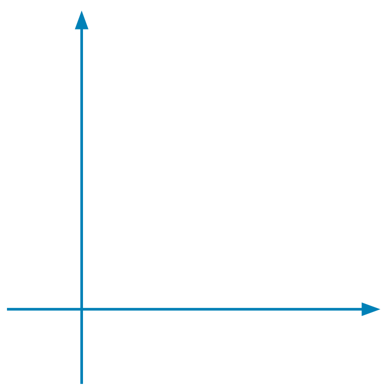


12. Dibujen todos los vectores con origen en (0; 0):

a. cuyo módulo es 3.



b. cuyo argumento está entre 60° y 120°.



13. Escriban en coordenadas cartesianas los siguientes vectores dados en forma polar:

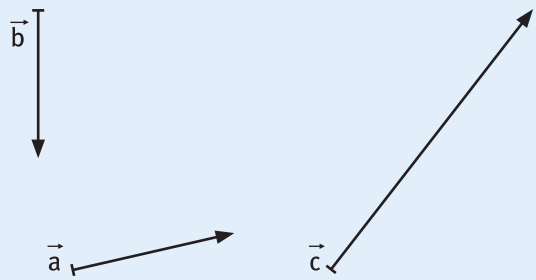
a. $|\vec{v}| = 5$, $\Phi = 30°$

b. $|\vec{v}| = 2$, $\Phi = 80°$

c. $|\vec{v}| = 10$, $\Phi = 180°$

Problema V

Observen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Escriban al vector $\vec{c}$ como el resultado de operaciones que combinen $\vec{a}$, $\vec{b}$ y números reales.



14. Escriban las coordenadas polares de cada uno de los siguientes vectores:

$\vec{a} = (5; 3) =$

$\vec{b} = (0; 4) =$

$\vec{c} = (7; 2) =$

15. Dados los vectores $\vec{a} = (7; 3)$, $\vec{b} = (1; 5)$ y $\vec{c} = (15; 11)$:

a. Hallen un vector que sea combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ¿Es único? ¿Por qué?

b. Hallen un vector que sea combinación lineal de $\vec{c}$ y $\vec{b}$. ¿Es único? ¿Por qué?

c. Hallen un vector que sea combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. ¿Es único? ¿Por qué?

Problema VI

Sean $\vec{a} = (2; 4)$ y $\vec{b} = (-3; -2)$, hallen las coordenadas de los vectores: $\vec{a} + \vec{b}$; $3\vec{a}$ y $-2\vec{b}$

16. Calculen $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sabiendo que $|\vec{a}| = 4$ y $\vec{b} = 3\vec{a}$

17. Dados los vectores $\vec{a} = (7; -3)$, $\vec{b} = (-1; 6)$ y $\vec{c} = (-4; -3)$, hallen:

$\vec{a} + \vec{b} =$

$\vec{c} + \vec{a} =$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} =$

$\vec{b} - \vec{a} =$

$2\vec{a} =$

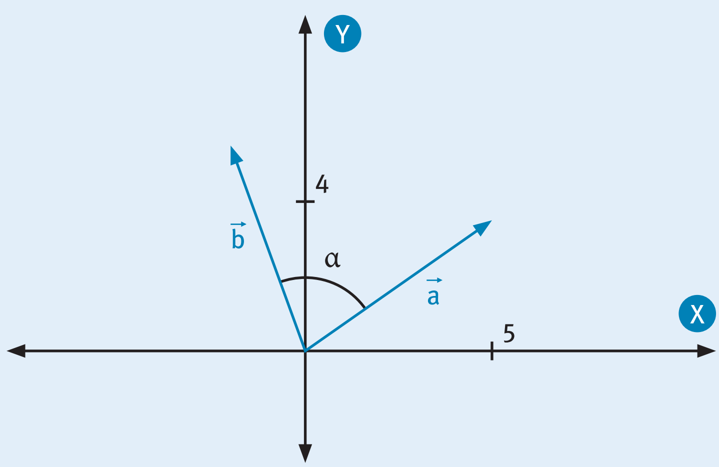
$3\vec{c} - 4\vec{a} =$

18. Escriban las coordenadas de tres vectores paralelos a $\vec{v} = (5; 2)$:

19. Analicen la demostración de la propiedad del producto escalar de dos vectores que tienen la misma dirección. Utilícenla como referente y demuestren las otras propiedades del producto escalar.

Problema VII

Hallen el ángulo α, $0° \leq \alpha \leq 180°$, que forman los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$, cuyas coordenadas cartesianas son $(5; 4)$ y $(-2; 6)$, respectivamente.



Las páginas 14 a la 224
no están disponibles.