

serie enfoques

Matemática III

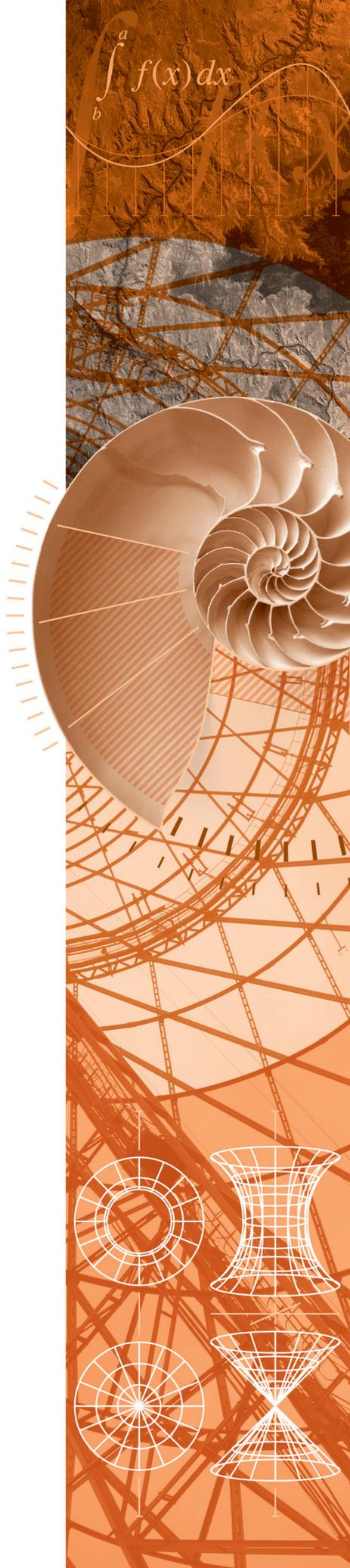
Argumentación y formalización
de los conocimientos

Liliana Edith Kurzrok

Claudia Comparatore

Silvia Altman

longseller
EDUCACIÓN



Coordinación editorial

Beatriz Grinberg

Edición

Rosana Sandler
Mariel Mambretti

Corrección

Judith Jamschon

Autores

Liliana Edith Kurzrok
Claudia Comparatore
Silvia Altman

Diseño y diagramación

Pablo Balcells

Fotografía

Archivo Longseller

© EDITORIAL LONGSELLER S.A.

Blanco Encalada 2388
(C1428DDL) CABA Argentina
(011) 4706-1235 / 3647
promocion@longseller.com.ar

www.longseller.com.ar

Queda hecho el depósito que dispone la ley 11723.

Libro de edición argentina.

Está prohibida y penada por la ley la reproducción total o parcial de este libro, en cualquier forma, por medios mecánicos, electrónicos, informáticos, magnéticos, incluso fotocopia y cualquier otro sistema de almacenamiento de información. Cualquier reproducción sin el previo consentimiento escrito del autor viola los derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Esta edición se terminó de imprimir en Triñanes gráfica, Buenos Aires, Argentina, en el mes de enero de 2013.

1ª edición

Kurzrok, Liliana Edith
Matemática III / Liliana Edith Kurzrok ; Claudia Rita
Comparatore ; Silvia Viviana Altman. - 1a ed. - Ciudad
Autónoma de Buenos Aires : Longseller, 2012.
224 p. ; 28x20 cm. - (Enfoques)

ISBN 978-987-683-115-4

1. Matemática. 2. Enseñanza Primaria. I. Comparatore,
Claudia Rita II. Altman, Silvia Viviana
CDD 372.7

Capítulo 1

Vectores

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 8

Vectores en el plano 8

USO DE LA COMPUTADORA 15

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 16

Vectores en el plano 16

Vector 16

Vectores paralelos 17

Vectores equivalentes 17

Vectores opuestos 17

Suma de vectores 18

Resta de vectores 19

Producto de un vector por un escalar 19

Coordenadas cartesianas de un vector 20

Coordenadas polares de un vector 21

Combinación lineal de vectores 22

Operaciones con vectores en forma cartesiana 23

Vectores paralelos en coordenadas cartesianas 23

Producto escalar de vectores 23

Propiedades del producto escalar 24

Producto escalar de dos vectores dados por sus coordenadas cartesianas 24

Vectores ortogonales 25

Ángulo entre dos vectores 25

ACTIVIDADES FINALES 26

Capítulo 2

Geometría analítica

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 30

Vectores 30

USO DE LA COMPUTADORA 34

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 35

Vectores 35

Ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen y tiene dirección \vec{v} 35

Distintas formas de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos 37

Rectas en el espacio 38

Rectas paralelas 39

Rectas perpendiculares 41

Rectas alabeadas 42

ACTIVIDADES FINALES 43

Capítulo 3

Números complejos

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 46

Números complejos 46

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 51

Números complejos 51

Números complejos 53

Operaciones con números complejos 54

Suma y resta 54

Multiplicación 54

Conjugado de un número complejo 54

División 55

Representación gráfica de números complejos 58

Forma trigonométrica de un número complejo 59

Raíces n-ésimas de la unidad 65

ACTIVIDADES FINALES 66

Capítulo 4

Sucesiones y series

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 68

Progresiones aritméticas y geométricas 68

USO DE LA COMPUTADORA 75

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 76

Progresiones aritméticas

y geométricas 76

Sucesiones 76

Progresiones aritméticas y geométricas 76

Suma de los n primeros términos de una progresión 78

Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes 83

Sucesiones definidas por recurrencia 87

ACTIVIDADES FINALES 88

Capítulo 5

El concepto de límite

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 92

Límites 92

USO DE LA COMPUTADORA 99

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 100

Límites 100

Límite de una función en un punto 101

Límites laterales 103

Límite infinito 104

Límite de sucesiones 107

Álgebra de límites 107

ACTIVIDADES FINALES 111

Capítulo 6

Cálculo de límites

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 114

Cálculo de límites 114

USO DE LA COMPUTADORA 119

Cálculo de límites 119

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 120

Para comenzar... 120

Límite indeterminado 124

ACTIVIDADES FINALES 131

Capítulo 7

Derivadas

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 134

Derivadas 134

USO DE LA COMPUTADORA 140

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 141

Derivadas 141

Velocidad media 141

Velocidad instantánea 142

Derivada de una función en un valor 144

Recta tangente al gráfico de una función en un punto 144

Función derivable en un valor 145

Función derivada 147

Propiedades de las funciones

derivables 149

Derivada logarítmica 153

Funciones derivadas

de funciones elementales 154

Funciones derivadas sucesivas 155

Diferencial de una función en un valor 156

ACTIVIDADES FINALES 157

Capítulo 8

Estudio de funciones sencillas

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 160

Aplicaciones de la función derivada 160

USO DE LA COMPUTADORA 168

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 169

Aplicaciones de la función derivada 169

Intervalos de crecimiento

y decrecimiento 169

Máximos y mínimos 169

Punto estacionario 170
Valor crítico 170
Función cóncava y función convexa 172
Punto de inflexión 173
Teorema de la función derivada
segunda 177
Regla de L'Hôpital 178

ACTIVIDADES FINALES 184

Capítulo 9

Integrales

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 188

**El concepto de integral y el cálculo
de áreas** 188

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 193

**El concepto de integral y el cálculo
de áreas** 193

Funciones primitivas
de funciones elementales 194
Propiedades de las funciones
primitivas 194

Área de la región limitada por el gráfico de
una función positiva 196

Integral definida 200

ACTIVIDADES FINALES 203

Capítulo 10

Probabilidad y estadística

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 206

Variables aleatorias 206

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 212

Variables aleatorias 212

Variable aleatoria 212

Función de probabilidad 213

Función de densidad y función
de distribución 214

Propiedad de la variable aleatoria
binomial 217

Variable aleatoria normal 218

ACTIVIDADES FINALES 222

ANEXO 224

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER

Analizar – Discutir – Resolver

Vectores en el plano

Problema I
Un grupo de ingenieros está construyendo un robot que será manejado por una computadora. Se proponen diseñar un programa para comandar sus movimientos con la menor cantidad de datos posibles. ¿Cuáles son los datos que deberían introducir en la máquina?



1. En cada caso dibujen un vector por el cual se pueda trasladar F_1 a la posición F_2 .

a.  b. 

Problema II
Una vez que el robot está terminado, comienzan a probarlo. En primer lugar, le dan instrucciones para que se traslade desde el escritorio hasta la biblioteca; luego, para que vaya desde allí hasta la puerta. Si quisieran que el robot se desplazara directamente desde el escritorio hasta la puerta, ¿cuál es el movimiento que deben indicarle? (Señálenlo en el dibujo.)



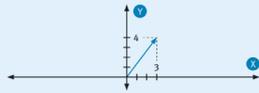
Problemas para introducir los contenidos y trabajar los posibles caminos de resolución.

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR

Explicar – Comprender – Formalizar Matemática III 35

Vectores

Problema I
Si analizamos el gráfico, observamos que entre la posición de la tortuga y el punto, podemos definir un vector cuyas coordenadas son (3; 4). Además, Gerardo quiere que la tortuga se mueva desde (0; 0) sobre la recta en la que se apoya el vector de coordenadas (3; 4).



Podemos considerar cada uno de los puntos que forman la recta como un vector. Busquemos la forma que tienen los vectores con origen en (0; 0) y con la misma dirección que el de coordenadas (3; 4). Todos estos vectores deben ser múltiplos de este último. Si llamamos \vec{v} a estos vectores: $\vec{v} = k \cdot (3; 4)$ donde k es cualquier número real. Entonces, la información que debe darle a la computadora pueden ser distintos valores de k para realizar el producto y, así, la tortuga irá recorriendo esta recta. Con $k > 0$, se dirigirá hacia el punto azul y con $k < 0$, se moverá en el otro sentido. Para determinar si la tortuga pasará por (4; 6), habrá que ver si este punto pertenece a la recta, o sea, si existe un número real k que verifique:

$$k \cdot (3; 4) = (4; 6) \quad (1)$$

$$3k = 4 \qquad 4k = 6$$

Al resolver cada ecuación, obtenemos que en la primera, $k = 15$ y en la segunda, $k = 16$; por lo tanto, no es posible encontrar un número real que verifique la condición (1). Entonces, dicho punto no se encuentra en la recta, es decir, la tortuga no pasará por allí. A esta forma de expresar la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector de coordenadas (3; 4) se la llama **ecuación vectorial**.

Ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen y tiene dirección \vec{v}

La ecuación vectorial de la recta L que pasa por el origen de coordenadas, con la dirección del vector \vec{v} es: $L: X = k \cdot \vec{v}$, con $k \in \mathbb{R}$.



Contenidos, conceptos teóricos y modelos explicativos a partir de los problemas centrales.

USO DE LA COMPUTADORA

Uso de la computadora Matemática III 119

Cálculo de límites

Les proponemos trabajar en Internet. Los invitamos a ingresar en la siguiente página: http://www.portalplanetasedna.com.ar/calculo_matematico.htm la cual nos permite realizar diversos cálculos matemáticos on-line.

En este caso, vamos a trabajar calculando diferentes límites:



Hagan click en el ícono "Hallar un límite"

Ingresen la función (recuerden colocar los paréntesis cuando sea necesario)



A donde tiende Hagan click en calcular

Si tienen alguna duda de cómo ingresar los datos, hagan click en "Como introducir", por ejemplo si quieren calcular un límite que tienda a infinito, tienen que poner en Enfoques: Inf y si tiende a menos infinito minf .

O si quieren calcular el límite de una raíz cuadrada tienen que poner sqr , por ej. $\sqrt{x+5} = \text{sqr}(x+5)$

Ahora sí, les proponemos calcular los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8x^2 + 9x - 8}{8x^2 + 9x^2 - x + 3} = \frac{\quad}{\quad}$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = \frac{\quad}{\quad}$

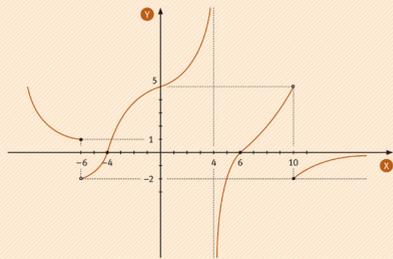
b. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x^2 + 4} = \sqrt{\quad}$ c. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = \cos \quad$

Introducción al uso de las nuevas tecnologías y su aplicación en el campo de la matemática.

ACTIVIDADES FINALES

Actividades finales Matemática III 111

1. Observen el gráfico de $f(x)$. Si es posible, completen en los lugares indicados; si no es posible, expliquen por qué.



a. $f(-6) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$

b. $f(0) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$

c. $f(4) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$

d. $f(6) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$

e. $f(10) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$ $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \frac{\quad}{\quad}$

2. Grafiquen en la carpeta dos funciones distintas que verifiquen que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $2 \in \text{Dom } f$ y $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Actividades orientadas a poner en juego los conocimientos adquiridos a lo largo del capítulo.

1

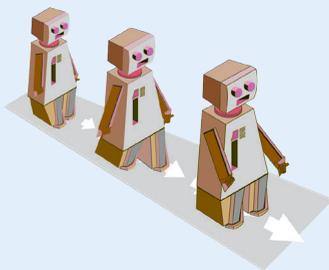
Vectores

Cuando en Física se debe identificar una fuerza, es necesario indicar de cuánto es y hacia dónde va. En este capítulo, veremos cómo se define matemáticamente este tipo de información.

Vectores en el plano

Problema I

Un grupo de ingenieros está construyendo un robot que será manejado por una computadora. Se proponen diseñar un programa para comandar sus movimientos con la menor cantidad de datos posibles. ¿Cuáles son los datos que deberían introducir en la máquina?

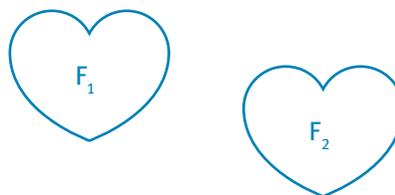


- En cada caso, dibujen un vector por el cual se pueda trasladar F_1 a la posición F_2 .

a.

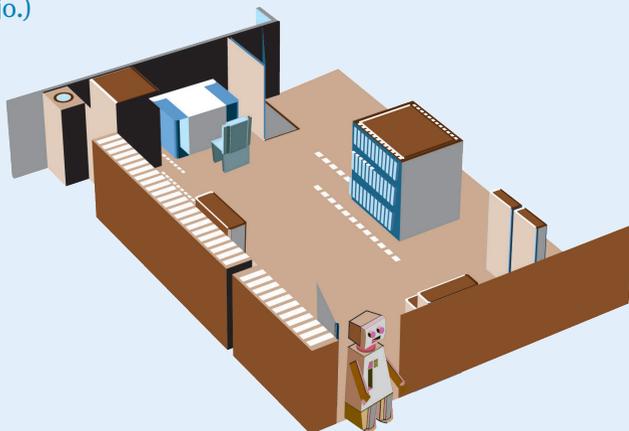


b.



Problema II

Una vez que el robot está terminado, comienzan a probarlo. En primer lugar, le dan instrucciones para que se traslade desde el escritorio hasta la biblioteca; luego, para que vaya desde allí hasta la puerta. Si quisieran que el robot se desplazara directamente desde el escritorio hasta la puerta, ¿cuál es el movimiento que deben indicarle? (Señálenlo en el dibujo.)



2. Dibujen un vector equivalente a \overrightarrow{AB} :



3. Dibujen un vector opuesto a \overrightarrow{CD} :



4. Dibujen un vector paralelo a \overrightarrow{MN} , que no sea equivalente a él.

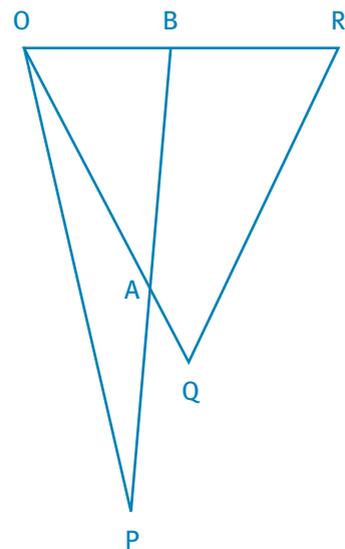


5. Dados los puntos $M = (1; 3)$, $N = (3; 7)$, $P = (5; 1)$ y $Q = (2; 6)$, determinen, sin representarlos gráficamente, si los siguientes vectores son equivalentes:

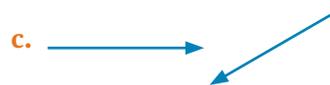
a. \overrightarrow{MP} y \overrightarrow{NQ} _____ b. \overrightarrow{MN} y \overrightarrow{PQ} _____

6. Sabiendo que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{BR} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BA}$, expresen los siguientes vectores en función de **a** y **b**:

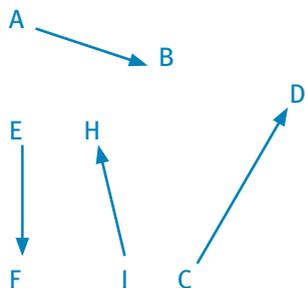
- a. \overrightarrow{BA}
- b. \overrightarrow{BP}
- c. \overrightarrow{RQ}
- d. \overrightarrow{QA}



7. Hallen el vector suma en cada uno de los siguientes casos:



8. Consideren los siguientes vectores:

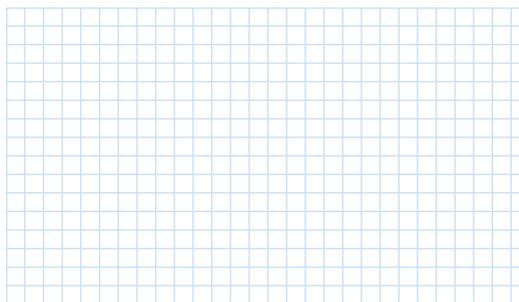


Grafiquen:

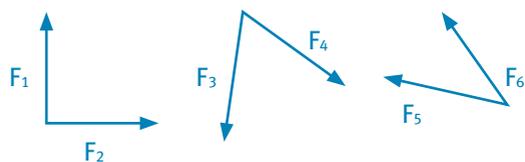
a. $\vec{AB} - \vec{IH}$

b. $\vec{CD} - \vec{EF}$

c. $\vec{EF} - \vec{IH}$



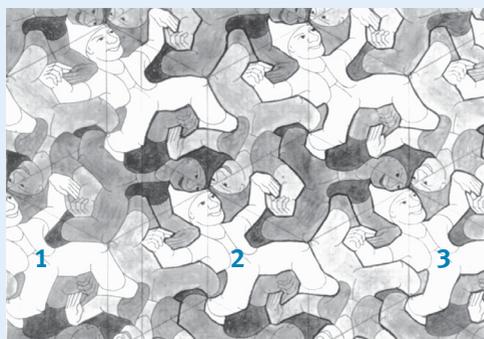
9. Hallen la resultante (suma) de los siguientes pares de fuerzas:



Problema III

Observen esta obra de Escher, en la que aparece una figura repetida varias veces. Indiquen qué movimientos permiten pasar de la figura:

- 1 a la 2.
- 2 a la 3.
- 1 a la 3.



10. Dados los puntos A, B y C, hallen gráficamente:

a. $2\vec{AB}$

b. $-1\vec{BC}$

c. $\frac{1}{2}\vec{AC}$

A ×

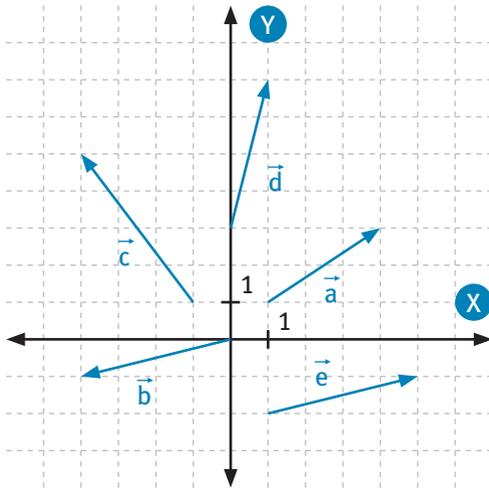
B ×

C ×

Problema IV

Volvamos a los ingenieros que construyen el robot. ¿Cómo se le puede indicar a la computadora cuál es la dirección, el sentido y el módulo del vector que define cada movimiento?

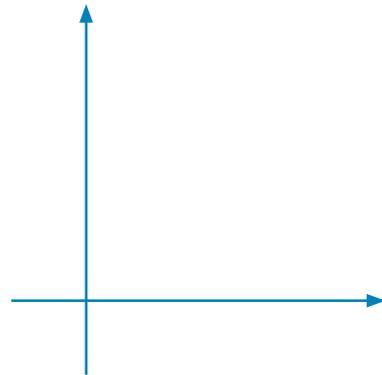
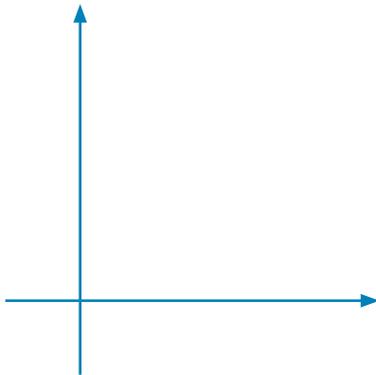
11. Escriban las coordenadas cartesianas de los siguientes vectores:



12. Dibujen todos los vectores con origen en (0; 0):

a. cuyo módulo es 3.

b. cuyo argumento está entre 60° y 120° .



13. Escriban en coordenadas cartesianas los siguientes vectores dados en forma polar:

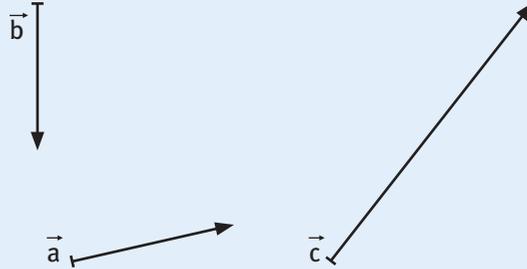
a. $|\vec{v}| = 5, \Phi = 30^\circ$ _____

b. $|\vec{v}| = 2, \Phi = 80^\circ$ _____

c. $|\vec{v}| = 10, \Phi = 180^\circ$ _____

Problema V

Observen los vectores \vec{a} y \vec{b} . Escriban al vector \vec{c} como el resultado de operaciones que combinen \vec{a} , \vec{b} y números reales.



14. Escriban las coordenadas polares de cada uno de los siguientes vectores:

$$\vec{a} = (5; 3) =$$

$$\vec{b} = (0; 4) =$$

$$\vec{c} = (7; 2) =$$

15. Dados los vectores $\vec{a} = (7; 3)$, $\vec{b} = (1; 5)$ y $\vec{c} = (15; 11)$:

a. Hallen un vector que sea combinación lineal de \vec{a} y \vec{b} . ¿Es único? ¿Por qué?

b. Hallen un vector que sea combinación lineal de \vec{c} y \vec{b} . ¿Es único? ¿Por qué?

c. Hallen un vector que sea combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} . ¿Es único? ¿Por qué?

Problema VI

Sean $\vec{a} = (2; 4)$ y $\vec{b} = (-3; -2)$, hallen las coordenadas de los vectores: $\vec{a} + \vec{b}$; $3\vec{a}$ y $-2\vec{b}$

16. Calculen $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sabiendo que $|\vec{a}| = 4$ y $\vec{b} = 3\vec{a}$

17. Dados los vectores $\vec{a} = (7; -3)$, $\vec{b} = (-1; 6)$ y $\vec{c} = (-4; -3)$, hallen:

$$\vec{a} + \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{c} + \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

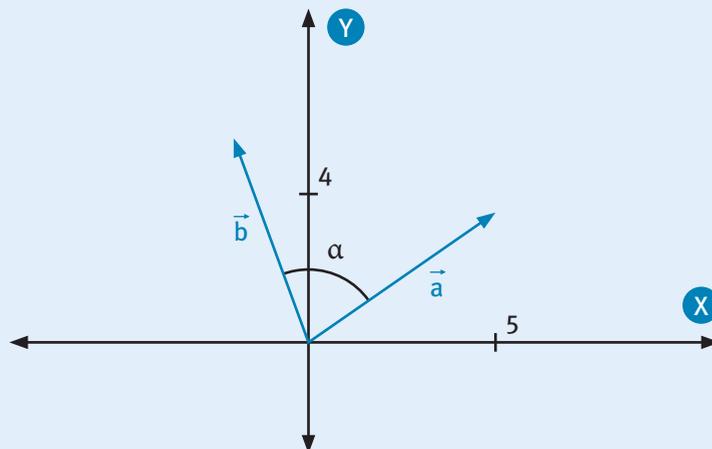
$$3\vec{c} - 4\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

18. Escriban las coordenadas de tres vectores paralelos a $\vec{v} = (5; 2)$:

19. Analicen la demostración de la propiedad del producto escalar de dos vectores que tienen la misma dirección. Utilícela como referente y demuestren las otras propiedades del producto escalar.

Problema VII

Hallen el ángulo α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} , cuyas coordenadas cartesianas son $(5; 4)$ y $(-2; 6)$, respectivamente.



**Las páginas 14 a la 224
no están disponibles.**