

serie enfoques

Matemática II

De la práctica a la formalización

Liliana Edith Kurzrok
Claudia Comparatore
Silvia Viviana Altman

longseller
EDUCACIÓN

Coordinación editorial

Beatriz Grinberg

Edición

María Virginia de Haro

Corrección

Judith Jamschon

Autores

Liliana Edith Kurzrok

Claudia Comparatore

Silvia Viviana Altman

Diseño de maqueta

Pablo Balcells

Diagramación

María José Suares

Christiansen

Diseño e ilustración de tapa

Sebastián Cremonese

Fotografía

Archivo Longseller

Gráficos

María José Suares

Christiansen

© EDITORIAL LONGSELLER S.A.

Showroom de promoción y ventas

Blanco Encalada 2388
(C1428DDL) CABA Argentina
(011)4706-1235 / 3647
promocion@longseller.com.ar

www.longseller.com.ar

Queda hecho el depósito que dispone la ley 11723.
Libro de edición argentina.

Esta prohibida y penada por la ley la reproducción total o parcial de este libro, en cualquier forma, por medios mecánicos, electrónicos, informáticos, magnéticos, incluso fotocopia y cualquier otro sistema de almacenamiento de información. Cualquier reproducción sin el previo consentimiento escrito del autor viola los derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Esta edición se terminó de imprimir en Danfer, Buenos Aires, Argentina, en el mes de Noviembre de 2011.

1ª edición

Altman, Silvia Viviana
Matemática II: de la práctica a la formalización II / Silvia Viviana Altman; Claudia Rita Comparatore; Liliana Edith Kurzrok. - 1a ed. - Buenos Aires : Longseller, 2011.
192 p. ; 28x20 cm. - (Enfoques)

ISBN 978-987-683-056-0

1. Matemática. Enseñanza. I. Comparatore, Claudia Rita. II. Kurzrok, Liliana Edith. III. Título.
CDD 510.7

Capítulo 1

Funciones y ecuaciones polinómicas

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 8

Funciones polinómicas 8

Teorema de Cauchy 8

Teorema de Bolzano-Weierstrass 9

Lema de Gauss 12

Multiplicidad de raíces 12

Relaciones entre el gráfico y la fórmula 13

USO DE LA COMPUTADORA 19

Encontrar raíces no racionales 20

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 22

Funciones polinómicas 22

Teorema de Cauchy 22

Ceros y lema de Gauss 27

Relaciones entre el gráfico y la fórmula 32

ACTIVIDADES FINALES 33

Capítulo 2

Semejanza de figuras y cuerpos

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 36

Figuras semejantes 36

Los perímetros de figuras semejantes 38

Las áreas de figuras semejantes 39

Volumen de cuerpos geométricos semejantes 43

USO DE LA COMPUTADORA 44

Construir figuras semejantes 44

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 45

Las figuras semejantes 45

Áreas de figuras semejantes 47

Volumen de cuerpos geométricos semejantes 48

ACTIVIDADES FINALES 49

Capítulo 3

Funciones y ecuaciones racionales

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 52

Las funciones racionales 52

USO DE LA COMPUTADORA 58

Las funciones racionales 58

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 59

Las funciones racionales 59

Función de proporcionalidad inversa 59

Asíntotas 61

Funciones homográficas 63

Las funciones racionales 67

ACTIVIDADES FINALES 69

Capítulo 4

Lugar geométrico. Circunferencia, elipse e hipérbola

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 72

Lugar geométrico 72

Circunferencia 73

Elipse 76

Hipérbola 81

Secciones cónicas 83

USO DE LA COMPUTADORA 84

EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 85

Lugar geométrico 85

Circunferencia 85

Elipse 87

Hipérbola 92

Secciones cónicas 96

ACTIVIDADES FINALES 97

Capítulo 5

Funciones y ecuaciones exponenciales y logarítmicas

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 100

Funciones exponenciales 100

Logaritmos 104

Ecuaciones exponenciales y

logarítmicas 110

USO DE LA COMPUTADORA 113Resolver ecuaciones con un
graficador 113**EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 115**

Función exponencial 115

Propiedades 116

Logaritmos 120

Propiedades de los logaritmos 121

Ecuaciones exponenciales y

logarítmicas 123

ACTIVIDADES FINALES 125

Capítulo 6

Sucesiones

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 128Progresiones aritméticas y
geométricas 128Suma de los n primeros términos de una
progresión 130**Sucesiones convergentes, divergentes y
oscilantes 135****Sucesiones definidas por
recurrencia 138****USO DE LA COMPUTADORA 141****EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 142**Progresiones aritméticas y
geométricas 142Suma de los n primeros términos de una
progresión 144**Sucesiones convergentes, divergentes y
oscilantes 149****Sucesiones definidas por
recurrencia 154****ACTIVIDADES FINALES 155**

Capítulo 7

Estadística

ANALIZAR–DISCUTIR–RESOLVER 158**Medidas de tendencia central 158****Variables continuas 164****Medidas de dispersión 165****USO DE LA CALCULADORA 170****Usar la calculadora 170****EXPLICAR–COMPRENDER–FORMALIZAR 171****Medidas de tendencia central 171**

Media aritmética 175

Propiedades de la media aritmética 177

Mediana 178

Variable continua y variable discreta 179

Intervalo de clase 179

Medidas de dispersión 182**ACTIVIDADES FINALES 185**

ANALIZAR-DISCUTIR-RESOLVER

128 Analizar - Discutir - Resolver

Progresiones aritméticas y geométricas

Problema I
Un inversionista quiere duplicar su dinero en el menor tiempo posible y para ello debe elegir entre dos instituciones. El banco Dinero Fácil le ofrece tomar su dinero en un depósito a plazo fijo al 4% de interés simple mensual. El banco Sin Engaños le ofrece depositar el dinero en una caja de ahorro donde, al finalizar cada mes, se le agregará el interés correspondiente a ese período, y la tasa que le ofrece es del 3% mensual. ¿En cuál de las dos instituciones duplica su capital en menos tiempo?

1. a. Completen estas sucesiones con tres términos más.
I. 1; 2; 4; 8; ...; i; ...; i-1
II. 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; ...; i-1
III. 4; -4; 4; -4; ...; i-1; ...

b. Escriban el término general de las sucesiones anteriores.

2. ¿Cuáles de estas sucesiones son progresiones aritméticas? ¿Cómo se dan cuenta?
a. 2; 5; 8; 11; ... b. 4; 12; 36; ...
c. 8; 8; 8; 8; ... d. -5; -3; -1; 2; ...

3. Escriban el término general de una progresión aritmética de razón -0,25.

4. Hallen el término 22.º de estas progresiones aritméticas.
a. 3; 7; 11; 15; ... b. 0,5; 0,25; 0; ...

5. Escriban los cinco primeros términos de una progresión aritmética de razón 3 sabiendo que el noveno término es 1,8.

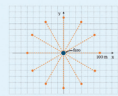
6. Escriban el término general de una progresión geométrica de razón -0,25.

EXPLICAR-COMPRENDER-FORMALIZAR

Explicar - Comprender - Formalizar Matemática 85

Lugar geométrico

Problema I
Si ubicamos al faro como centro de un sistema de ejes cartesianos, notamos que el barco debe ubicarse a 100 m del centro, en cualquier sentido. O sea:




Queda formada, así, una circunferencia con centro en el faro y radio de 100 m. Es decir, el barco puede ubicarse en cualquiera de todos los puntos del plano que cumplen con la propiedad de estar a 100 m de distancia del faro.

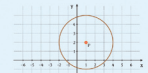
Llamamos **lugar geométrico** al conjunto de puntos del plano que cumplen cierta propiedad.

Circunferencia

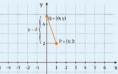
Llamamos **circunferencia** al lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia fija, r, de un punto dado, P.
El punto P se llama **centro** de la circunferencia y la distancia r, **radio**.



Problema II
a. Los puntos que están a 3 unidades de (1; 2) son los puntos que se encuentran en la circunferencia de centro (1; 2) y radio 3. Analicémoslo en un sistema de ejes cartesianos.



Llamemos Q al punto pedido. Dado que $x = 0$, $Q = (0; y)$; además, la distancia entre P y Q debe ser 3.



Queda formado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 e $(y - 2)$, con lo cual, por el teorema de Pitágoras: $\text{dist}(P, Q) = \sqrt{1^2 + (y - 2)^2}$
En general:

La distancia entre dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ es: $\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Problemas para introducir los contenidos y trabajar los posibles caminos de resolución.

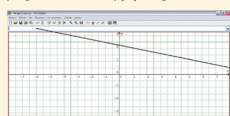
Contenidos, conceptos teóricos y modelos explicativos a partir de los problemas centrales.

USO DE LA COMPUTADORA

58 Uso de la computadora

Las funciones racionales

Para las siguientes actividades usaremos el programa Graphmatica. Es un programa que puede bajarse gratuitamente de Internet y que permite graficar distintas funciones.



Para graficar es necesario poner la función en esta barra. Hay que escribirla como $y = f(x)$.

1. a. Grafiquen las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ y $m(x) = x^2 - 9$. Tengan en cuenta que para escribir la fórmula de una función, en este programa debe ponerse y = en lugar de f(x).
b. Si necesitaran graficar las ecuaciones de las asíntotas verticales, ¿qué ecuaciones le pedirían al programa que graficase? ¿Por qué?

c. ¿Qué relación tienen las ecuaciones de esas asíntotas con la función $m(x) = x^2 - 9$?

d. ¿Cuántas ramas tiene esta gráfica? ¿Por qué?

e. ¿Qué relación tiene el vértice de la función $m(x) = x^2 - 9$ con la gráfica de esta función?

2. a. Grafiquen la función $f(x) = \frac{3 - x}{x^2 - 4}$.
b. Si necesitaran graficar las ecuaciones de las asíntotas verticales, ¿qué ecuaciones le pedirían al programa que graficase? ¿Por qué?

c. ¿Qué relación tienen las ecuaciones de esas asíntotas con la función $m(x) = x^2 - 16$? ¿Por qué?

d. ¿Cuántas ramas tiene esta gráfica? ¿Por qué?

e. Escriban una expresión equivalente de f(x) y compruébenlo haciendo el gráfico.

f. El punto $(4; \frac{1}{4})$ pertenece a la gráfica de la función? ¿Qué se observa en el gráfico? ¿Por qué consideran que ocurre eso?

ACTIVIDADES FINALES

Actividades finales Matemática 125

1. Una población de bacterias aumenta el 3,5% cada 10 horas. Después de 5 días de comenzada la observación, se tenían 200 g de bacterias.

a. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la masa de las bacterias en función del tiempo?

b. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento por hora, día y por semana?

c. ¿Cada cuánto tiempo se duplica la masa de las bacterias?

d. ¿Después de cuánto tiempo de empezada la observación la masa es de 1 kg?

2. El Strencio es una sustancia radiactiva cuya vida media es de 28,8 años. Pasados 6 meses de colocada cierta cantidad de esta sustancia en una cubeta, se observa que hay 1,5 kg.

a. ¿Cuál es la función que permite calcular la masa remanente?

b. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por año, mes, década y por siglo?

c. ¿Después de cuánto tiempo de comenzada la observación la masa será de 500 g?

3. Hallar los valores de x que verifican las siguientes igualdades:

a. $\log_2(2x - 5) = 2$

b. $\log_2 x = 9 + 2$

c. $\frac{9^{x-1}}{3^{2x-1}} = (81^{x+1})^{x-1}$

d. $\frac{3^{x-2}}{5^x} = 7^x - 3$

Introducción al uso de las nuevas tecnologías y su aplicación en el campo de la matemática.

Actividades orientadas a poner en juego los conocimientos adquiridos a lo largo del capítulo.

1

Funciones y ecuaciones polinómicas

Al modelizar situaciones de diversa índole, se trata de que las funciones involucradas sean polinómicas debido a las características y la ductilidad de estas. En este capítulo, analizaremos algunas de sus propiedades.

Funciones polinómicas

Teorema de Cauchy

Problema I

En un laboratorio deciden medir la temperatura, en grados, de una sustancia durante cierto día, comenzando a las 6 de la mañana. Aproximaron los datos con la fórmula $f(t) = 0,01 t^3 - 0,36 t^2 + 2,88 t$, donde t es el tiempo medido en horas desde el inicio de la medición.

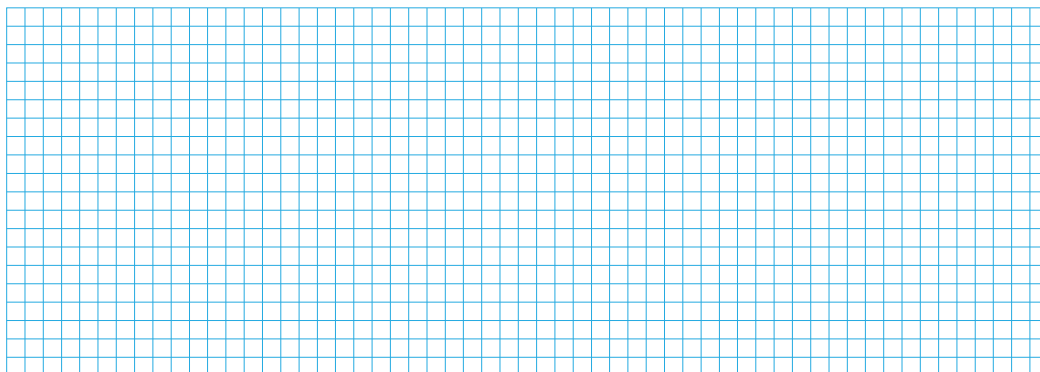
- ¿A qué hora la temperatura era sobre cero?
- ¿A qué hora la temperatura era bajo cero?
- ¿En algún momento la temperatura fue de 6° ?

- ¿Se puede afirmar que existe un valor de x para el cual la función polinómica $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, verifica que $f(x) = 2,8$? Expliquen por qué.

- La altura sobre el nivel del mar a la que vuela un globo aerostático está dada por la función $f(t) = t \cdot (t^2 - 10 t + 25)$, donde t representa los días de viaje.

- ¿A qué altura estará el globo a los 3 días de salir?

- Tracen un gráfico aproximado de la altura del globo en función de los días de viaje.



- ¿Cuál es el dominio de dicha función? _____
- ¿Estuvo el globo en algún momento a 18 m sobre el nivel del mar? ¿Por qué?

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Problema II

Encuentren los ceros y determinen el gráfico que corresponde a cada función. Expliquen en qué se basan para justificar su elección.

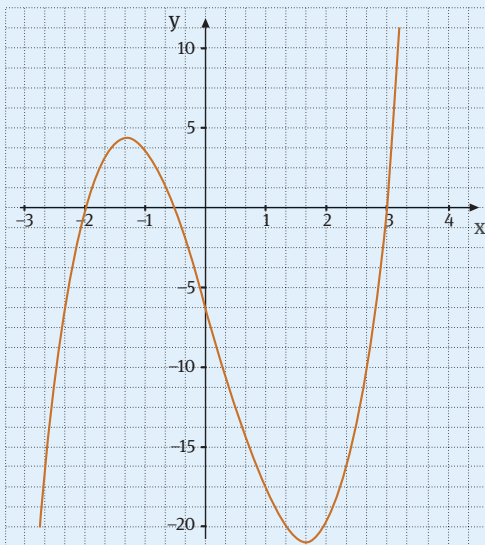
$$f_1(x) = (x - 3)(2x + 1)(x + 2)$$

$$f_3(x) = (x - 3)^3(2x + 1)^2(x + 2)$$

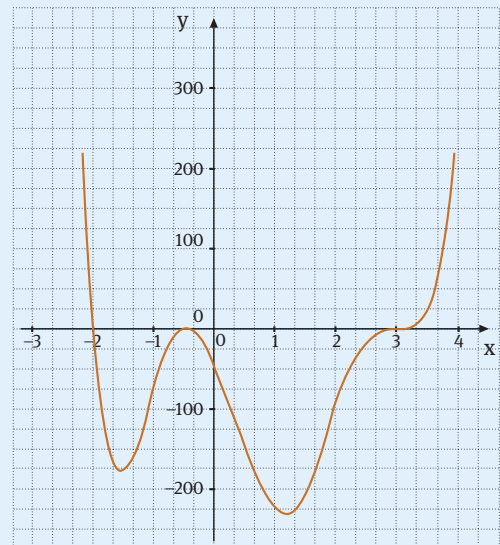
$$f_2(x) = -2(x - 3)^2(2x + 1)(x + 2)^2$$

$$f_4(x) = -3(x - 3)^2(2x + 1)^3(x + 2)$$

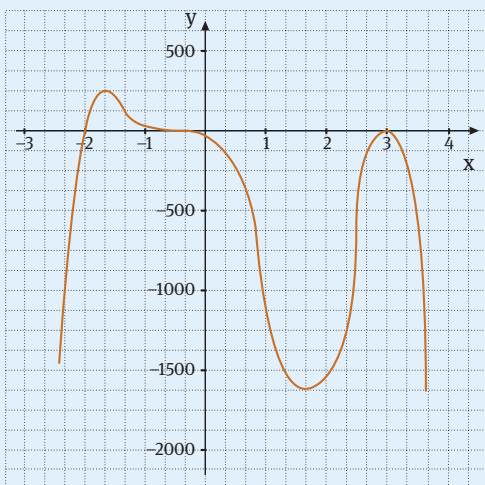
a.



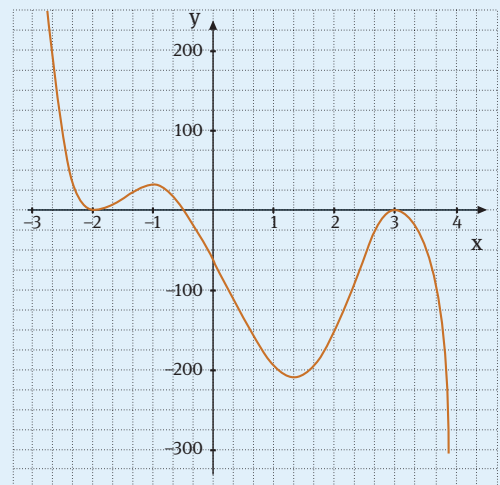
b.



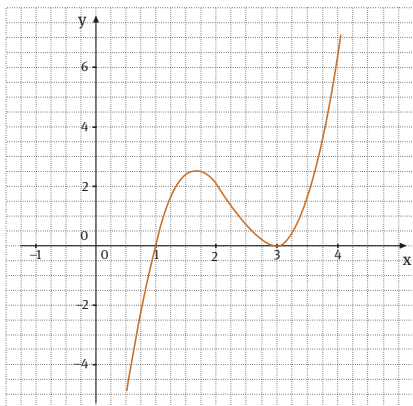
c.



d.



3. Indiquen si es posible que el siguiente gráfico corresponda a la fórmula $f(x) = -2(x - 1)(x + 3)^2$. Expliquen su decisión.



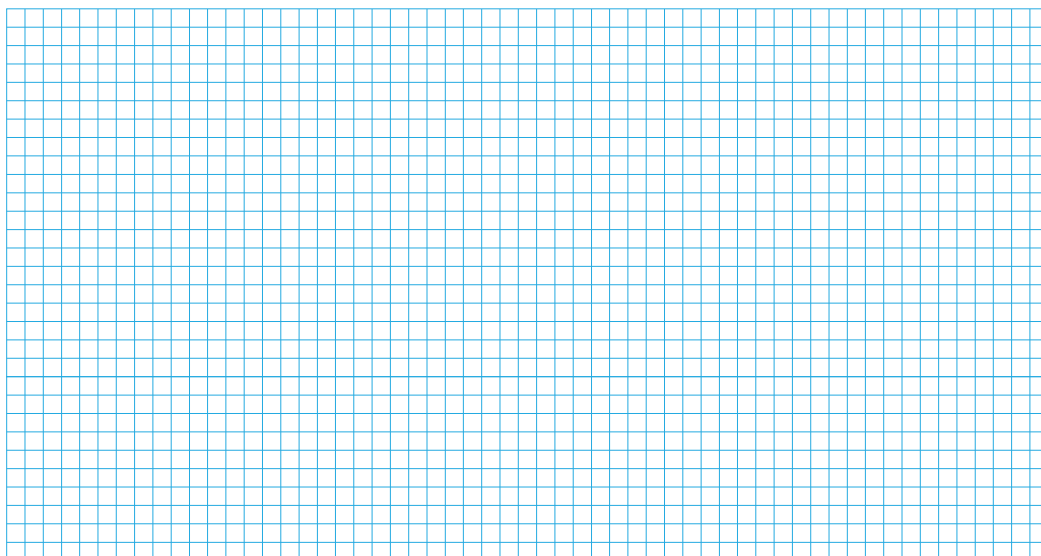
4. Grafiquen estas funciones polinómicas.

a. $f(x) = 9x^3 - 3$

b. $g(x) = (x - 3)(x + 5)(x - 1)$

c. $h(x) = x^4 - 2x^3$

d. $t(x) = -2(x - 1)^3(x + 3)^2(x - 5)$



Problema III

Busquen un graficador en la computadora. Puede ser Graphmatica, GeoGebra, Winplot, etc. Analicen diferencias y similitudes de las funciones $f(x) = x^n$ para cualquier número natural n . Determinen ceros, positividad y negatividad cuando n es par y cuando es impar.

5. Encuentren dominio, ordenada al origen, ceros, y conjunto de positividad y de negatividad de estas funciones. Grafíquenlas en la carpeta o con la computadora. Indiquen el corrimiento correspondiente respecto de la función $f(x) = x^9$.

a. $G(x) = 2x^9$

b. $H(x) = -x^9 + 2$

c. $R(x) = x^9 - 4$

d. $P(x) = 3x^9 - 6$

6. Encuentren dominio, ordenada al origen, ceros, conjunto de positividad y negatividad de estas funciones. Grafíquenlas en la carpeta o con la computadora. Indiquen el corrimiento correspondiente respecto de la función $f(x) = x^6$.

a. $G(x) = 3x^6$

b. $H(x) = -2x^6 + 2$

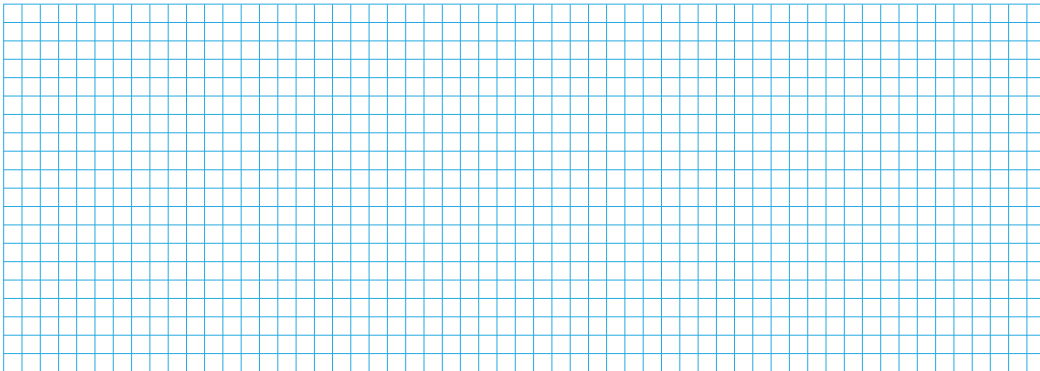
c. $R(x) = 8x^6 - 4$

d. $P(x) = 3x^6 - 6$

7. A partir de las conclusiones obtenidas en el análisis de las gráficas de $f(x) = x^9$ y $f(x) = x^6$, completen la siguiente tabla, explicando cada paso.

Fórmula	$f(x) = x^n, n \text{ par}$	$f(x) = x^n, n \text{ impar}$
Forma aproximada de la gráfica		
Dominio		
Ordenada al origen		
Ceros		
C^+		
C^-		
Intervalos de crecimiento		
Intervalos de decrecimiento		
Imagen		

8. Dadas las siguientes funciones, hallen: dominio, intersección con los ejes, intervalos de positividad y de negatividad, y gráfico aproximado.
- a. $f(x) = 9x^3 - 3$
 - b. $g(x) = (x - 3)(x + 5)(x - 1)$
 - c. $h(x) = x^4 - 2x^3$
 - d. $k(x) = -3(x + 3)(x - 5)(x + 1)$



Lema de Gauss

Problema IV

En el libro *Matemática IV* planteamos este problema.
 En el club del barrio quieren instalar una pileta de natación rectangular. El arquitecto dijo que para que el diseño sea armonioso, la pileta debe tener el doble de largo que de ancho, y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho.
 Para hacer un presupuesto, averiguan que el material para las paredes y el piso cuesta \$75 el m²; la soldadura para las juntas, \$40 el m; la excavación y colocación, \$50 el m³, y el traslado de materiales, \$100.

La función que representa el costo, en pesos, en función del ancho de la pileta, en metros, es $C(x) = 50x^3 + 375x^2 + 320x + 100$.

¿Cuáles son las medidas de la pileta que se puede hacer con \$52.260?

Multiplicidad de raíces

Problema V

Encuentren ceros, positividad y negatividad de las siguientes funciones polinómicas.

- a. $P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12$
- b. $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

9. Encuentren los ceros de las siguientes funciones polinómicas.

a. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2 - 4x$

b. $g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

c. $h(x) = 60x^3 - 67x^2 + 21x - 2$

10. Escriban las fórmulas de estas funciones, de manera equivalente, como producto de polinomios de grado menor.

a. $P(x) = (7x - 3)(x^2 - 8)\left(2x^5 + 7x^4 - \frac{25}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2\right)$

b. $P(x) = (5x^2 - 1)(3x^3 + 14x^2 + 3x + 10)$

c. $F(x) = -24x^3 - 8x^2 + 6x + 2$

d. $R(x) = 81x^4 - 16$

e. $T(x) = -3x^5 - 2x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 4x$

**Las páginas 14 a las 192
no están disponibles.**