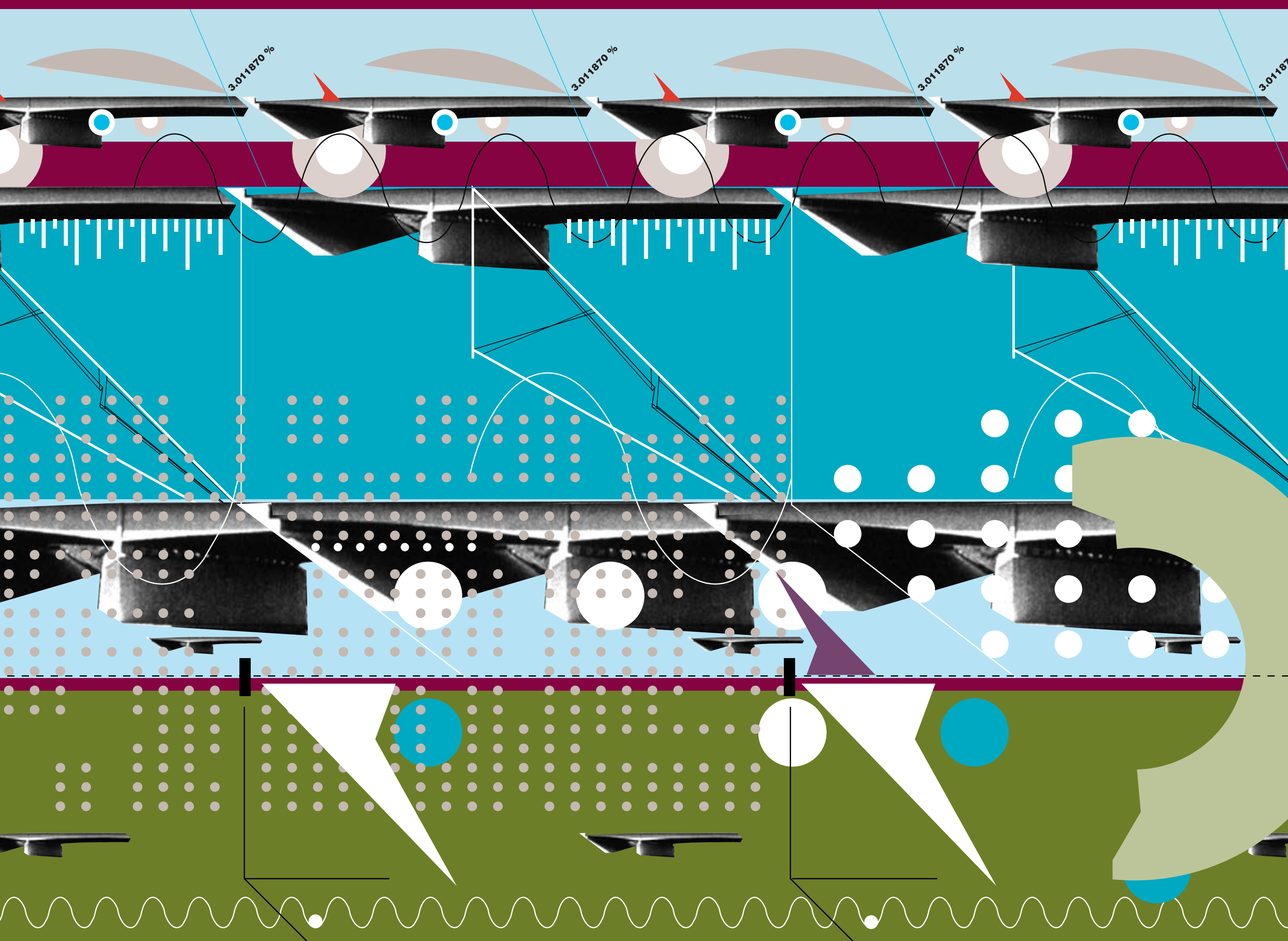
longseller

2

Matemática | Polimodal

Funciones 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok



longseller

Matemática | Polimodal

Funciones 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

longseller

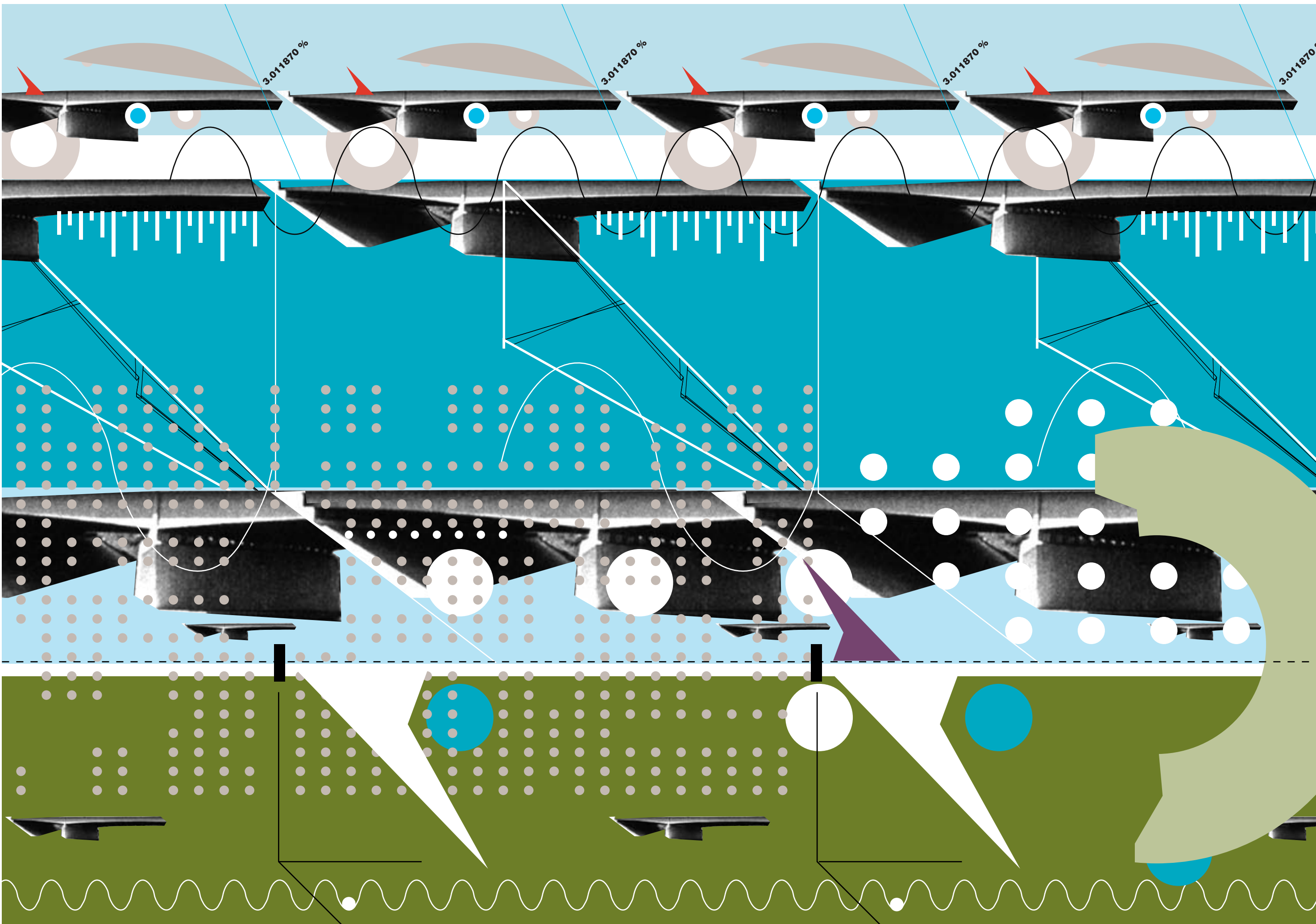
Matemática | Polimodal

Funciones 2

Silvia V. Altman
Profesora de Matemática y Astronomía, INSP "Joaquín V. González".
Ganadora del Subsidio para profesores de colegios secundarios, Fundación Antorchas (1994).
Docente en escuelas medias.

Claudia R. Comparatore
Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de Buenos Aires.
Ganadora del Subsidio para profesores de colegios secundarios, Fundación Antorchas (1994).
Docente en escuelas medias y en la Facultad de Ciencias Exactas, UBA.

Liliana E. Kurzrok
Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de Buenos Aires.
Profesora de Matemática, ORT Formación docente para profesionales.
Becaria de Investigación, Conicet, UBA.
Docente en escuelas medias y en la Facultad de Ciencias Exactas, UBA.



Cómo leer este libro

Problemas

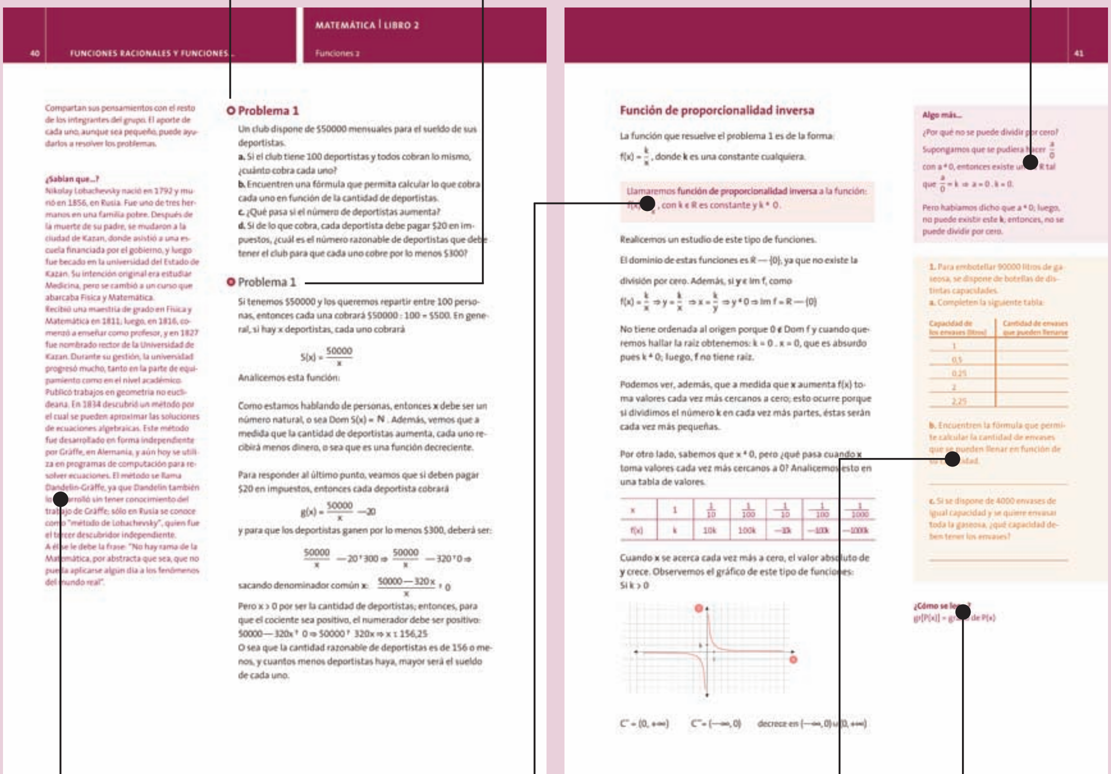
Al comenzar cada capítulo, y para introducir los contenidos, se presentan uno o más problemas para resolver y discutir en grupos, que se identifican con el ícono ○.

Posible resolución

Se presenta un posible camino para resolver cada uno de los problemas propuestos. Permite confrontar diferentes procedimientos y verificar las soluciones obtenidas. Se identifica con el ícono ●.

Algo más…

Se presentan comentarios y aclaraciones sobre los temas desarrollados.



¿Sabían que…?

Se presentan biografías, reseñas históricas y datos de interés que enriquecen los contenidos.

Textos recuadrados

Aquí se incluyen definiciones para que puedan ser localizadas rápidamente cuando se necesita consultarlas.

Actividades

Se proponen actividades que sirven para verificar la comprensión de los contenidos abordados y la aplicación de éstos en distintas situaciones.

¿Cómo se lee…?

Se ofrece el significado de los símbolos utilizados en la página.

Guía de ejercitación

Incluye actividades orientadas a poner en juego todos los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo del capítulo.

Guía de autoevaluación

Contiene actividades que pueden ser resueltas al finalizar el capítulo para autoevaluar lo aprendido.

Se incluyen las respuestas al final del libro.

GE 2 GUÍA DE EJERCITACIÓN

MATEMÁTICA | LIBRO 2

Funciones 2

Funciones racionales, funciones homográficas...

9. Calculen el dominio de las siguientes funciones racionales.

a. f (x) =

b. g (x) =

10. Grafiquen las siguientes funciones y hallen:

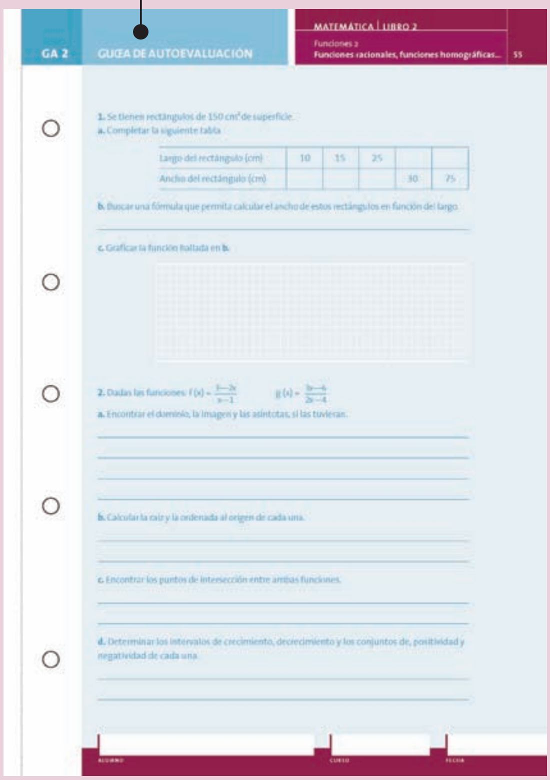
a. Dominio e imagen

b. Asíntotas

c. Ceros, conjuntos de positividad y negatividad

i. $f_1(x) =$

ii. $f_2(x) =$



GA 2 GUÍA DE AUTOEVALUACIÓN

MATEMÁTICA | LIBRO 2

Funciones 2

Funciones racionales, funciones homográficas... 55

1. Se tienen rectángulos de 150 cm² de superficie.

a. Completar la siguiente tabla

Largo del rectángulo (cm)	10	15	25		
Ancho del rectángulo (cm)				30	75

b. Buscar una fórmula que permita calcular el ancho de estos rectángulos en función del largo.

c. Graficar la función hallada en b.

2. Dadas las funciones: $f(x) = \frac{3-2x}{x-1}$ $g(x) = \frac{3x-6}{2x-4}$

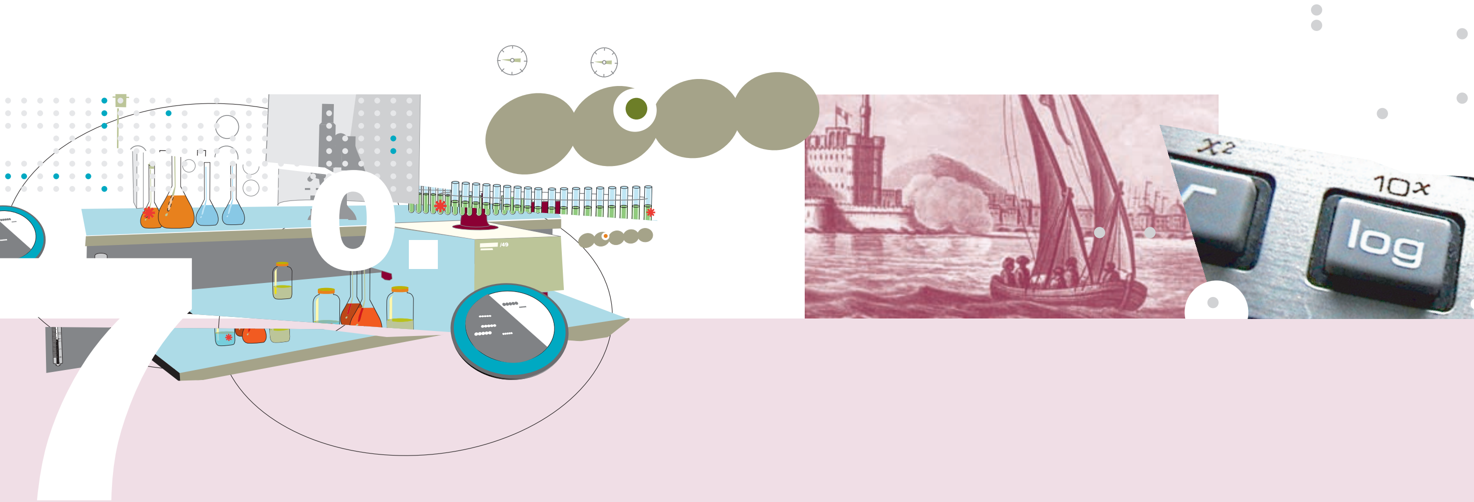
a. Encontrar el dominio, la imagen y las asíntotas, si las tuvieran.

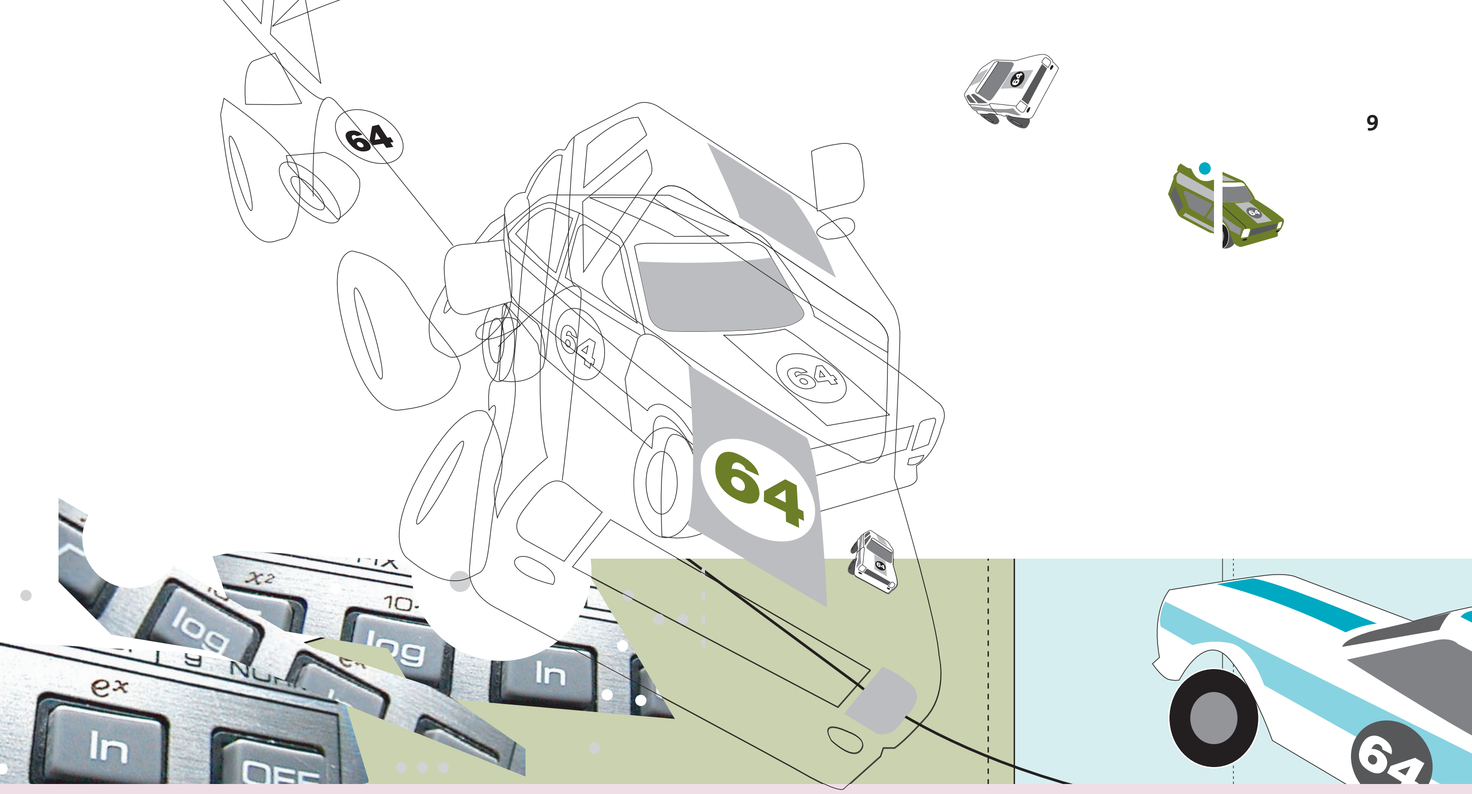
b. Calcular la raíz y la ordenada al origen de cada una.

c. Encontrar los puntos de intersección entre ambas funciones.

d. Determinar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los conjuntos de positividad y negatividad de cada una.

Índice

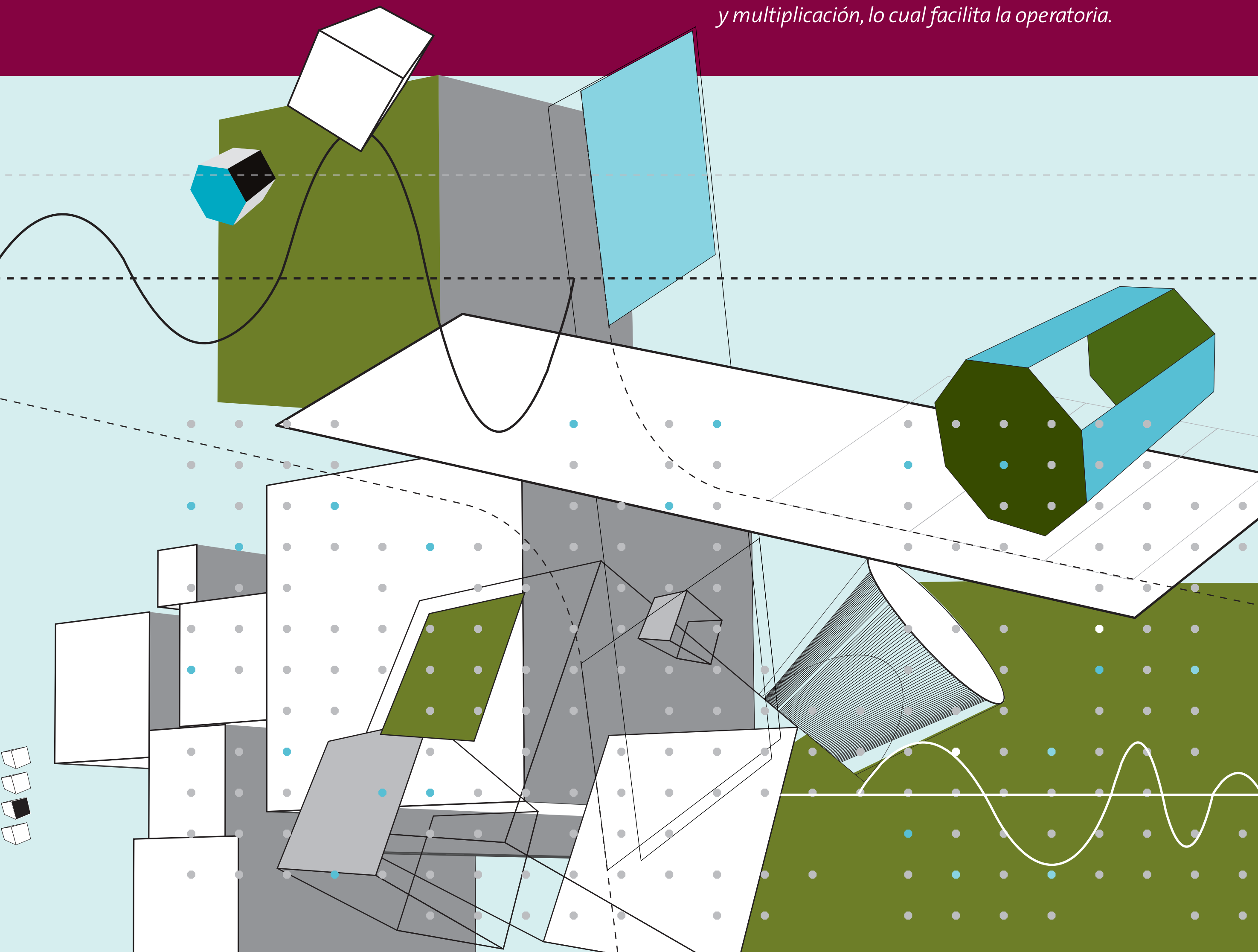




log
log
ln
ln
OFF
e^x
64

1 Funciones y ecuaciones polinómicas

Muchas veces los científicos buscan expresiones matemáticas que les permitan vincular las variables que están estudiando y, de esta manera, encontrar resultados sin necesidad de realizar la experiencia. Por ejemplo, el volumen de un cubo se representa como $V(x) = x^3$. Las funciones polinómicas son una buena herramienta para encontrar ese tipo de expresiones utilizando sólo las operaciones matemáticas básicas: suma y multiplicación, lo cual facilita la operatoria.



Registren en sus carpetas los distintos caminos que intentaron para resolver un problema y los motivos por los cuales los descartaron. Esto les servirá a la hora de estudiar.

¿Sabían que...?
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Baviera (ahora Alemania), y murió el 19 de febrero de 1897 en Berlín, Alemania. Es conocido por su construcción de la teoría de funciones complejas por medio de series de potencias (sumas de infinitos monomios). Era un simple profesor hasta que publicó un documento sobre funciones abelianas en el diario de Crelle. Así, obtuvo reconocimiento académico, y en 1856 lo designaron en la Universidad de Berlín. Sus conferencias de Matemática atrajeron a estudiantes de todo el mundo. En Berlín, Weierstrass dio una introducción al análisis, donde abordó sus funciones por primera vez. Estudió funciones enteras, las funciones definidas por los productos infinitos, y demás. Sus resultados cambiaron el futuro de la Matemática.

Problema 1

Una empresa necesita envasar un producto en recipientes de lata cilíndricos, de manera tal que el diámetro de la base sea la mitad de la altura.

a. ¿Con qué dimensiones construyen la lata si ésta debe tener una capacidad de 350 cm^3?

b. Encuentren una fórmula que les permita calcular el volumen de la lata en función de la altura.

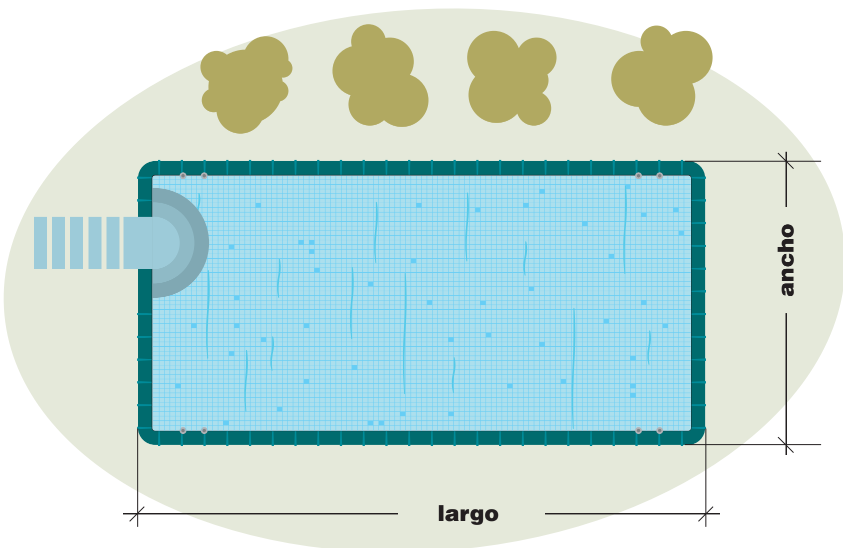
Problema 2

Claudia se compró un terreno en un *country* y quiere instalar allí una pileta de natación rectangular. El arquitecto le dijo que para que el diseño sea armonioso, su pileta debe tener el doble de largo que de ancho, y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho. Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta $75 el m^2; la soldadura para las juntas, $40 el m; la excavación y colocación, $50 el m^3 y el traslado de materiales, $100.

a. ¿Cuánto le costará a Claudia una pileta de 5 m de ancho?

b. ¿Si Claudia dispone de $10000, ¿puede construir una pileta de 8 m de largo?

c. ¿Cuáles son las dimensiones de la pileta más grande que puede construir con $5665?



Problema 1

En primer lugar, debemos pensar en encontrar una relación entre las dimensiones de las latas y su volumen. Sabemos que el volumen de un cilindro se calcula con la fórmula $V = \pi\, r^2 h$, donde **r** es el radio de la base del cilindro y **h** su altura; luego, $350 = \pi\, r^2 h$. Pero

$r = \frac{1}{2}\, d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}\, h$; luego,

$$350 = \pi \left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{16}\, h^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{350.16}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$$

Con lo cual, si la lata tiene 350 cm^3 debe tener una altura

$h = \sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$ y un radio $r = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$.

La fórmula que nos permite calcular el volumen de la lata en función de la altura es, entonces, $V\,(h) = \frac{\pi}{16}\, h^3$.

Problema 2

alto $\frac{1}{2}$ x

ancho x

largo 2x

Si la pileta de Claudia tiene 5 m de ancho, debe tener 10 m de largo y 2,5 m de altura, entonces:

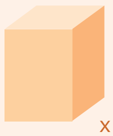
Cantidad de material necesario para el piso	$5 \times 10\ m^2 = 50\ m^2$
Cantidad de material necesario para dos paredes laterales	$2\ .\ (5 \times 2{,}5\ m^2) = 2\ .\ 12{,}5\ m^2 = 24\ m^2$
Cantidad de material necesario para las otras dos paredes laterales	$2\ .\ (10 \times 2{,}5\ m^2) = 2\ .\ 25\ m^2 = 50\ m^2$
Cantidad total de material necesario	$50\ m^2 + 2\ .\ 12{,}5\ m^2 + 2\ .\ 25\ m^2 = 124\ m^2$

Puerto de Alejandría

¿Sabían que...?

Hypatía de Alejandría, matemática, astrónoma y filósofa del siglo IV, fue la hija de un matemático y astrónomo que trabajaba en el museo de esa ciudad, quien le enseñó el arte de la oratoria y los principios de la enseñanza. Muchos estudiantes de otras ciudades viajaban a Alejandría para aprender con ella. La mayor parte de sus escritos eran libros de texto para sus alumnos. Su trabajo más importante fue en Álgebra. Más cerca de nuestros días, María Gaetana Agnesi (1718 - 1799), la mayor de veintiún hermanos, hija de un profesor de Matemática que le brindó una gran educación (contrariamente a las costumbres de su época en cuanto a las mujeres), fue reconocida como una verdadera niña prodigio debido a la cantidad de lenguas que hablaba desde muy temprana edad. En su adolescencia se graduó en Matemática, y a los veinte años comenzó a trabajar en su más importante obra, *Istituzione analitiche*, pensada como un libro de texto para sus hermanos. Cuando este libro fue publicado en 1748, se transformó en un éxito en el mundo académico, por ser uno de los primeros y más completos tratados de análisis matemático y un modelo de claridad. Fue traducido a varios idiomas y utilizado ampliamente como texto.

1. Un edificio necesita un tanque de agua en forma de ortoedro (paralelepípedo de base cuadrada, como indica la figura), y cuya altura exceda en 10 cm a la cuarta parte del lado de la base.



a. ¿Qué volumen tendrá un tanque que tenga 1 m de ancho?

b. ¿Qué volumen tendrá el tanque si tiene 1 m de altura?

c. Encuentren una función que permita calcular el volumen del tanque en función del lado de su base.

2. Tenemos un diario gigante abierto. Encuentren una función que permita calcular el grosor que se obtiene al doblarlo 4 veces en función del grosor del diario abierto.

El costo del material es entonces: \$75 . 124 = \$9300.
Tenemos en total 8 juntas: 4 de 2,5 m; 2 de 10 m y 2 de 5 m, o sea que necesitamos (4 . 2,5 + 2 . 10 + 2 . 5) m = 40 m de soldadura ∴
el costo de la soldadura será: \$40 . 40 m = \$1600.
Para saber el costo de colocación, necesitamos conocer los m^3 que se van a colocar.
El volumen de la pileta es 5 . 10 . 2,5 m^3 = 125 m^3 ∴
el costo de excavación y colocación será: \$50 . 125 m^3 = \$6280.
El costo del traslado será: \$100.
El costo total de la pileta será:
\$9300 + \$1600 + \$6280 + \$100 = \$17280.

Si la pileta debe tener 8 m de largo, entonces tendrá 4 m de ancho y 2 m de alto ∴

Costo de materiales	(8 . 4 + 8 . 2 . 2 + 4 . 2 . 2) . 75 = \$6000
Costo de soldadura	(8 . 2 + 4 . 2 + 2 . 4) . 40 = \$1280
Costo de excavación y colocación	(8 . 2 . 4) . 50 = \$3200
Costo de traslado	\$100
Costo total	\$10580

Para poder saber cuáles son las dimensiones de la pileta que se puede construir con \$5665, tenemos que encontrar una fórmula que nos permita calcular el costo de la pileta en función de su ancho.
Llamemos, entonces, **x** al ancho de la pileta; luego, el largo es 2x y la profundidad es $\frac{1}{2}$ x.

Costo de materiales	$(x \,.\, 2x + 2x \,.\, \frac{1}{2} x \,.\, 2 + x \,.\, \frac{1}{2} \,.\, x \,.\, 2) \,.\, 75 =$ $= (2x^2 + 2x^2 + x^2) \,.\, 75 = 5x^2 \,.\, 75 = \$375\, x^2$
Costo de soldadura	$(2x \,.\, 2 + x \,.\, 2 + \frac{1}{2} \,.\, x \,.\, 2) \,.\, 40 =$ $= (4x + 2x + x) \,.\, 40 = 7x \,.\, 40 = \$280 \,.\, x$
Costo de excavación y colocación	$(x \,.\, 2x \,.\, \frac{1}{2} \,.\, x) \,.\, 50 = \$50 \,.\, x^3$
Costo de traslado	\$100
Costo total	$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100$

Por lo tanto, tenemos que resolver la ecuación:
$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 = 5665$

Como vemos, esta ecuación es distinta de las conocidas hasta el momento, porque tiene un término con x^3. Dado que no podemos despejar **x**, ni tampoco conocemos alguna fórmula que la resuelva, analicemos qué se puede hacer.
Para ello, debemos definir previamente varios conceptos.

Función polinómica

Un **polinomio**, o **función polinómica**, es una expresión de la forma:

$$\mathbf{P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

donde los $\mathbf{a_0,\dots,a_n}$ son números reales, **n** es un número natural o cero y todas las potencias a las que aparece elevado **x** son números naturales o cero.

$\mathbf{a_0,\dots,a_n}$ se llaman **coeficientes del polinomio**
$\mathbf{a_n}$ se llama **coeficiente principal**
$\mathbf{a_0}$ se llama **término independiente**
n se llama **grado del polinomio**
Si $a_n = 1$, dicho polinomio se llama **mónico**.
El polinomio cuyos coeficientes son todos cero se llama **polinomio nulo**, se nota N(x) y no tiene grado.

Por ejemplo:

$P(h) = \frac{\pi}{16} h^3$ es un polinomio de grado 3; el coeficiente principal es $\frac{\pi}{16}$, y el resto de los coeficientes, cero.
$Q(x) = 50x^3 + 375x^2 + 280x + 100$ es un polinomio de grado 3 cuyo coeficiente principal es 50.
$R(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 5$ es un polinomio mónico de grado 4.

Las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado y las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de grado 2.

Dado que para cualquier valor de **x** podemos realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función, el dominio de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$, aunque en las funciones de los problemas 1 y 2 el contexto determina que $x > 0$.

3. Determinen cuáles de las siguientes expresiones son polinomios y cuáles no. En este último caso, expliquen por qué. En caso de que sí lo sean, determinen el grado, el coeficiente principal y el término independiente.

a. $Q(x) = 9x + 8x^2 - 2$

b. $R(x) = 0$

c. $T(x) = -x + \frac{3}{x}$

d. $Z(x) = 3$

e. $W(x) = 8x^4 - 3 - 8x + \frac{1}{2} x^2 - 2$

f. $K(x) = -x^4 - 3x - 8 \,.\, x^{-2}$

g. $M(x) = \sqrt{x}$

4. Resuelvan las siguientes ecuaciones y escriban el conjunto solución.

a. $9\, x^3 - 3 = 0$

b. $(x - 3) \,.\, (x + 5) \,.\, (x - 1) = 0$

c. $2x^4 - 4x^3 = x^4 + 2x^3$

5. Las funciones halladas en los problemas 1 y 2 ¿son polinomios? ¿Por qué? ¿Cuál es el grado y cuáles son los coeficientes?

6. Dadas las siguientes funciones polinómicas, encuentren dominio, ordenada al origen, ceros, conjunto de positividad y negatividad. Grafíquenlas como corrimientos de la función $f(x) = x^9$ o de la función $f(x) = x^6$, según corresponda.

a. $G(x) = 2\,x^9$

b. $R(x) = x^6 - 4$

c. $H(x) = -x^9 + 2$

Dos **polinomios** $P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

$Q(x) = b_n\,x^n + b_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$

son **iguales** si tienen igual grado y todos sus coeficientes correspondientes iguales, o sea, si $\forall i = 1, 2, \ldots, n$: $a_i = b_i$

Una **ecuación polinómica de grado n** es una ecuación de la forma: $a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$

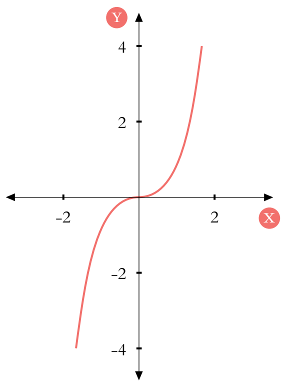
Por ejemplo: la ecuación del problema 2 que tenemos que resolver es una ecuación polinómica de tercer grado o de grado 3. La ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$ es una ecuación polinómica de grado 2 (una ecuación cuadrática), y vimos con anterioridad métodos para resolverla (fórmula resolvente)[1]. Debemos ahora buscar formas de resolver ecuaciones de grado mayor.

Comencemos analizando algunas funciones polinómicas especiales:

$f(x) = x^3$

es una función polinómica de grado 3, con coeficiente principal 1 y el resto de los coeficientes, 0. Como tiene un solo término, se llama **monomio**. Analicemos su gráfica a partir de una tabla de valores.

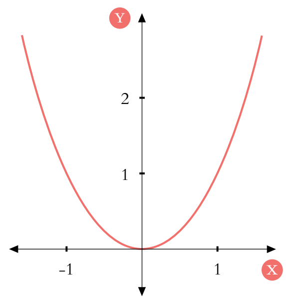
x	0	1	–1	2	–2
f(x)	0	1	–1	8	–8



$f(x) = x^4$

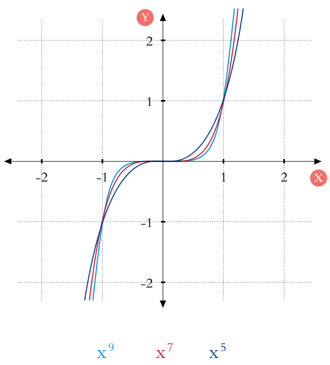
es una función polinómica de grado 4, con coeficiente principal 1 y el resto de los coeficientes, 0. Como tiene un solo término, se llama **monomio**. Analicemos su gráfica a partir de una tabla de valores.

x	0	1	–1	2	–2
f(x)	0	1	1	16	16

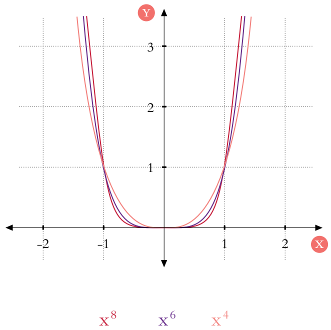


[1] Ver Libro 1, capítulo 4.

Como vemos en el gráfico, la curva que representa esta función es simétrica respecto del punto (0, 0), o sea, es una función impar[2], y su imagen es ℝ.
Tiene ordenada al origen 0 y raíz $x = 0$; su conjunto de positividad es $(0, +\infty)$, su conjunto de negatividad es $(-\infty, 0)$ y es creciente en todo su dominio.
Análogamente, podemos graficar $f(x) = x^n$ con **n** impar.
Veamos algunos ejemplos.



Como vemos en el gráfico, la curva que representa esta función es simétrica respecto del eje **y**, o sea, es una función par[3], y su imagen es $[0, +\infty)$.
Tiene ordenada al origen 0 y raíz $x = 0$; su conjunto de positividad es ℝ, su conjunto de negatividad es ϕ, y es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.
Análogamente, podemos graficar $f(x) = x^n$ con **n** par.
Veamos algunos ejemplos.



Si quisiéramos graficar ahora funciones de la forma $f(x) = a_n x^n + a_0$, podemos analizarlas como corrimientos[4] de los gráficos anteriores

Problema 3

En una empresa, se conoce la función precio unitario P(x) y la función costo en la producción y venta de **x** miles de unidades de determinado artículo, C(x). Estas funciones están dadas por las siguientes fórmulas: $P(x) = 8 - 0{,}7x$; $C(x) = 6 + 1 \,.\, 3x$.

a. Si el ingreso es el producto de la cantidad de artículos vendidos por el precio unitario, escriban la fórmula de la función ingreso I(x).

b. Si la ganancia es la diferencia entre el ingreso y el costo, ¿cuál es la fórmula correspondiente a la función ganancia G(x) para este artículo?

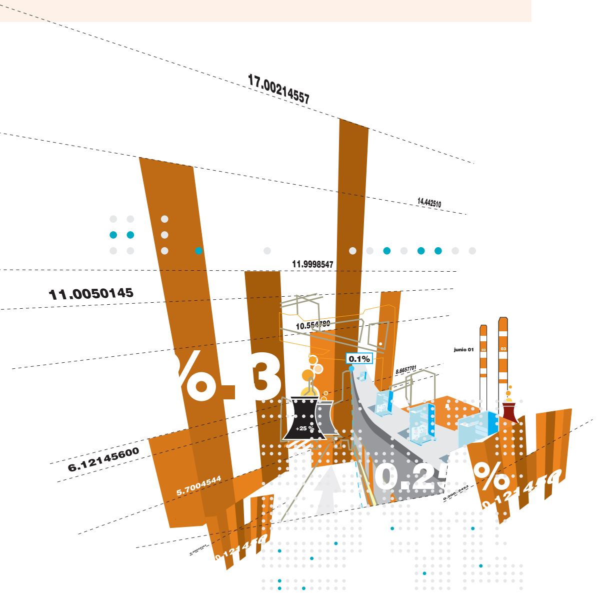
7. A partir de las conclusiones obtenidas en el análisis de las gráficas de $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, completen la siguiente tabla, explicando cada paso.

Fórmula	$f(x) = x^n$, n par	$f(x) = x^n$, n impar
Forma aproximada de la gráfica		
Dominio		
Ordenada al origen		
Ceros		
C^+		
C^-		
Intervalos de crecimiento		
Intervalos de decrecimiento		
Imagen		

[2,3,4] Ver Libro 1, capítulo 1.

8. A partir de las conclusiones obtenidas en el análisis de las gráficas de $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, completen la siguiente tabla, explicando cada paso.

Fórmula	$f(x) = ax^n + b$	
	n par, $a > 0, b > 0$	n impar $a > 0, b > 0$
Forma aproximada de la gráfica		
Dominio		
Ordenada al origen		
Ceros		
C^+		
C^-		
Intervalos de crecimiento		
Intervalos de decrecimiento		
Imagen		



Problema 3

En la primera pregunta, nos piden que hallemos la fórmula de la función producto de la cantidad de artículos vendidos por el precio unitario, por lo tanto:
$I(x) = P(x) \,.\, x = (8 - 0{,}7x) \,.\, x$. Si aplicamos la propiedad distributiva y operamos, obtenemos:
$I(x) = 8x - 0{,}7\,x^2$

Para el ítem **b.**, hallamos la función que resulta de calcular la diferencia entre el ingreso y el costo.
$G(x) = I(x) - C(x) = 8x - 0{,}7\,x^2 - (6 + 1 \,.\, 3x) = 6{,}7x - 0{,}7\,x^2 - 6$

El dominio de I(x) es el conjunto de todos los valores que están en el dominio de P(x) que sean mayores que 0, y el dominio de G(x) está formado por los valores **x** que petenecen al dominio de P(x) y al de C(x), o sea que el dominio de las nuevas funciones es la intersección de los dominios de las funciones originales.

Operaciones con polinomios

Suma de polinomios

La **suma de dos funciones polinómicas** P(x) y Q(x) es la función R(x) tal que $R(x) = P(x) + Q(x)$.
Siendo:
$P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$
$Q(x) = b_n\,x^n + b_{n-1}\,x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$
el polinomio $R(x) = c_n\,x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$ es **suma de los dos polinomios** P(x) y Q(x) si sus coeficientes c_i verifican:
$c_i = a_i + b_i$, $\forall i$ entre 0 y **n**.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 6x + 7 \\ Q(x) = 8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$R(x) = P(x) + Q(x) = (3x^4 + 5x^2 - 6x + 7) + (8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2) =$
$= 8x^5 + (3 - 7)\,x^4 + (5 - 3)\,x^2 + (-6 + 9)\,x + (7 + 2) =$
$= 8x^5 - 4x^4 + 2\,x^2 + 3\,x + 9$

$$\left.\begin{array}{l} M(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7 \\ N(x) = -3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$M(x) + N(x) = (3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7) + (-3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2) =$
$= (3 - 3)\,x^4 + (8 - 7)\,x^3 + (-6 - 3)\,x^2 + (-5 + 9)\,x + (7 + 2) =$
$0 \,.\, x^4 + x^3 - 6\,x^2 + 4x + 9$

Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$
Definimos el **polinomio opuesto de P(x)** como:

$$-P(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1x - a_0$$

La **resta de dos funciones polinómicas** P(x) y Q(x) es la suma entre P(x) y el opuesto de Q(x), o sea

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 6x + 7 \\ Q(x) = 8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$P(x) - Q(x) = (3x^4 + 5x^2 - 6x + 7) - (8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2) =$
$= 3x^4 + 5x^2 - 6x + 7 - 8x^5 + 7x^4 + 3x^2 - 9x - 2 =$
$= -8x^5 + (3 + 7)\, x^4 + (5 + 3)\, x^2 + (-6 - 9)\, x + (7 - 2) =$
$= -8x^5 + 10\, x^4 + 8\, x^2 - 15\, x + 7$

Analizando los ejemplos anteriores, observamos que el grado de la suma y de la resta de dos polinomios depende del grado de éstos.

Conclusión

- **Si dos polinomios tienen distinto grado, entonces el grado de la suma y el grado de la resta coinciden con el grado mayor.**
- **Si ambos tienen el mismo grado, n, entonces:**

Si $a_n + b_n \neq 0$, entonces gr $[P(x) + Q(x)] = n$
Si $a_n + b_n = 0$, entonces gr $[P(x) + Q(x)] < n$

Producto de polinomios

El **producto** de dos funciones polinómicas P(x) y Q(x) es la función polinómica R(x) tal que R(x) = P(x) . Q(x).
El producto de dos polinomios es un nuevo polinomio que se obtiene multiplicando cada término del primero por cada uno de los términos del segundo, o sea, aplicando la propiedad distributiva.

¿Cómo se lee...?
gr[P(x)] = grado de P(x)

9. Dados los polinomios
$P(x) = -5x^8 + 6x^7 - \frac{1}{4}x^5 + 8x^3 - 9x^2 + x - 3$

$Q(x) = 5x^8 + 2x^7 - 6x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 7x^3 +$
$+ 12x^2 - 4x + 11$

realicen las siguientes operaciones:

a. P(x) + Q(x)

b. 2P(x) – 9Q(x)

10. Determinen los valores de los números reales **a** y **b**, tales que P(x) + Q(x) = R(x), siendo:

a. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$
$Q(x) = ax^3 - bx^2 + (a + b)\, x - 2$
$R(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 3$

b. $P(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^2 + \frac{2}{5}x + 1$
$Q(x) = ax^5 - (a + b)x^2 + bx - 2$
$R(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 4x^5 + x^2 + \frac{12}{5}x - 1$

11. Dadas las funciones polinómicas

$P(x) = -2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 5$

$Q(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 3$

$R(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 7$

encuentren

a. $W(x) = 5\,P(x) . Q(x)$

b. $Z(x) = [Q(x)]^2$

c. $M(x) = R(x)\,[P(x) + Q(x)]$

12. Dados los polinomios de grado 5 A(x), B(x) y C(x), ninguno de los cuales es opuesto al otro, determinen los posibles grados de:

a. $A(x) - B(x)$

b. $A(x) . B(x) + C(x)$

c. $[A(x) - B(x)] . C(x)$

Por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7 \\ Q(x) = x^5 + 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$P(x) . Q(x) = (3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7) . (x^5 + 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2)$

Aplicando la propiedad distributiva:

$P(x) . Q(x) = 3x^9 + 21x^7 - 9x^6 + 27x^5 + 6x^4 + 8x^8 + 56x^6 -$
$- 24x^5 + 72x^4 + 16x^3 - 6x^7 - 42x^5 - 18x^4 - 54x^3 - 12x^2 - 5x^6 -$
$- 35x^4 + 15x^3 - 45x^2 - 10x + 7x^5 + 49x^3 - 21x^2 + 63x + 14 =$
$= 3x^9 + 8x^8 + 15x^7 + 42x^6 - 32x^5 + 25x^4 + 26x^3 - 78x^2 + 53x + 14$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 8x^2 + 2x - 3 \\ Q(x) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$P(x) . Q(x) = (8x^2 + 2x - 3) . 5 = 40x^2 + 10x - 15$

Observemos que al multiplicar dos polinomios donde ninguno de ellos es el polinomio nulo, N(x) = 0, el coeficiente principal queda formado por la multiplicación de los coeficientes principales y el grado es la suma de los grados, dado que:

$\forall x \in \mathbb{R}:\ x^n . x^m = x^{n+m}$

Conclusión

El grado del producto de dos polinomios no nulos es la suma de los grados de los polinomios factores.

$gr[P(x) . Q(x)] = gr[P(x)] + gr[Q(x)]$

Problema 4

Matías estaba diseñando un programa de computación para construir cajas con forma de prisma recto de base rectangular. Para ello, decidió que las medidas de las aristas de dicho prisma surgieran como funciones de una cierta variable **x**. Tuvo problemas con la computadora y perdió parte de la información. Sólo recuperó las expresiones del volumen del prisma y de dos aristas. ¿Cómo puede hacer para hallar la expresión de la tercera arista si sabe que:

Volumen = $V(x) = 80x^3 + 158x^2 + 101x + 21$

Arista a = $A(x) = 2x + 1$

Arista b = $B(x) = 5x + 3$?

Problema 4

El volumen de este prisma se calcula a través del producto de las expresiones de las tres aristas. Si llamamos C(x) a la arista cuya fórmula se perdió, podemos plantear lo siguiente:

$$V(x) = A(x) . B(x) . C(x)$$

Como A(x) . B(x) = (2x+1) . (5x+3) = $10x^2 + 11x + 3$; luego, nuestro problema se reduce a encontrar C(x) que verifique:

$80x^3 + 158x^2 + 101x + 21 = (10x^2 + 11x + 3) \cdot C(x)$

Analicemos primero los grados. Sabemos que:
gr[V(x)] = 3 y gr[A(x) . B(x)] = 2
gr[V(x)] = gr[A(x) . B(x) . C(x)] = gr[A(x)] + gr[B(x)] + gr[C(x)] ⇒
⇒ 3 = 2 + gr[C(x)] ⇒ gr[C(x)] = 1 ⇒ C(x) = ax + b; luego:

$80x^3 + 158x^2 + 101x + 21 = (10x^2 + 11x + 3) \cdot (ax + b) =$
$= 10ax^3 + 10bx^2 + 11ax^2 + 11b\,x + 3a\,x + 3b \Rightarrow$
como dos polinomios son iguales si todos sus coeficientes son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} 80 = 10a \\ 158 = 10b + 11a \\ 101 = 11b + 3a \\ 21 = 3b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 8 \text{ y } b = 7\text{; luego,}$$

luego, C(x) = 8x + 7

Lo que resolvimos fue una división exacta de polinomios.

Necesitamos analizar, entonces, cómo se dividen, en general, los polinomios. Para ello, recordemos qué ocurre con los números enteros.
Dividir un número entero **a** por otro número entero **b** es encontrar un número entero **c** tal que a = b . c; por ejemplo, si a = 10 y b = 5 entonces c = 2, dado que 5 . 2 = 10. Pero nosotros sabemos que ese número **c** no siempre existe. Por ejemplo, si a = 10 y b = 6, la división entera no es exacta, sino que el cociente es 1 y el resto es 4. Podemos escribir, entonces: 10 = 6 . 1 + 4.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

Es decir, dados dos números enteros **a** y **b**, con b ≠ 0, existen siempre únicos números **c** y **r**, tales que:
a = b . c + r ; 0 ≤ r < b

Algo similar ocurre con los polinomios.

Cociente de polinomios

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), siempre existen polinomios C(x) y R(x) únicos, llamados cociente y resto, respectivamente, tales que:
P(x) = C(x) . Q(x) + R(x) con gr[R(X)] < gr[Q(x)] o R(x) = 0

13. Encuentren, si existen, números reales **a** y **b** tales que P(x) . Q(x) = R(x), en cada caso:

a. $P(x) = x + 3$
$Q(x) = ax^2 + 3x + 1$
$R(x) = 2x^3 + 9x^2 + bx + 3$

b. $P(x) = (a + 1)\,x^3 - 3x$
$Q(x) = x^2 + 1$
$R(x) = 5\,x^5 + 2x^3 - (2 - b)\,x$

c. $P(x) = a\,x^4 + 3x$, $Q(x) = 2x + 3$
$R(x) = 4\,x^5 + 6\,x^4 + 8x^2 + 9x$

14. ¿Podemos conocer el grado de un polinomio P(x), sabiendo que:
$[P(x)]^3 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$?

15. Encuentren el polinomio P(x) del ejercicio anterior.

¿Sabían que...?

El *algoritmo*, una técnica sistemática para solucionar un problema, fue utilizado por primera vez por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Éste es un método de resolución de problemas complicados mediante el uso repetido de otro método de cálculo más sencillo. Un ejemplo de esto es el cálculo de la división larga en números enteros o en polinomios.

En la actualidad, el término “algoritmo” se aplica a muchos de los métodos de resolver problemas que empleen una secuencia mecánica de pasos, como el diseño de un programa de computadora. Al igual que los algoritmos usados en aritmética, los algoritmos para computadoras pueden ser desde muy sencillos hasta bastante complejos.

En todos los casos, la tarea que el algoritmo ha de realizar debe ser definible. Esta definición puede incluir términos matemáticos o lógicos, o una compilación de datos o instrucciones escritas. Esto quiere decir que un algoritmo debe ser programable, incluso si al final se comprueba que el problema no tiene solución.

En la actualidad, existen muchos algoritmos para diversas aplicaciones y algunos sistemas avanzados, como los algoritmos de inteligencia artificial, que llegarán a ser corrientes en el futuro.

Consideremos un ejemplo:

Sean $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9$ y $Q(x) = 2x^2 + 6x + 8$,

necesitamos encontrar polinomios C(x) y R(x) tales que:

$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$; con $gr[R(x)] < gr[Q(x)]$ o $R(x) = 0$

Como $gr[R(x)] < gr[Q(x)] \Rightarrow gr[R(x)] \leq 1 \Rightarrow R(x) = mx + n$.

Además:

$gr[P(x)] = gr[Q(x) \,.\, C(x) + R(x)] \Rightarrow$ como $gr[R(x)] < gr[Q(x)]$

$gr[P(x)] = gr[Q(x) \,.\, C(x)] = gr[Q(x)] + gr[C(x)] \Rightarrow$

$4 = 2 + gr[C(x)] \Rightarrow gr[C(x)] = 2 \Rightarrow C(x) = ax^2 + bx + c$

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x) \Rightarrow$$

$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9 = (2x^2 + 6x + 8)\,(ax^2 + bx + c) + (mx + n)$

Operando, obtenemos:

$$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9 =$$
$$2ax^4 + (2b + 6a)\,x^3 + (8a + 2c + 6b)\,x^2 + (8b + 6c + m)\,x + (8c + n)$$

y como los polinomios deben ser iguales:

$$\left.\begin{array}{lcl} 2a = 3 & \Rightarrow & a = \frac{3}{2} \\ 2b + 6a = -5 & \Rightarrow & b = -7 \\ 8a + 2c + 6b = 2 & \Rightarrow & c = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow C(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - 7x + 16$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 8b + 6c + m = -3 & \Rightarrow & m = -43 \\ 8c + n = 9 & \Rightarrow & n = -119 \end{array}\right\} \Rightarrow R(x) = -43x - 119$$

Veamos otra manera de escribir la operación:

Algoritmo de división

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & -5x^3 & +2x^2 & -3x & +9 & \underline{2x^2 + 6x + 8} \\ -\;3x^4 & +9x^3 & +12x^2 & & & \frac{3}{2}x^2 - 7x + 16 \quad \text{COCIENTE} \\ \hline & -14x^3 & -10x^2 & -3x & +9 & \\ & -\;-14x^3 & -42x^2 & -56x & & \\ \hline & & 32x^2 & +53x & +9 & \\ & & -\;32x^2 & +96x & +128 & \\ \hline & & & -43x & -119 & \text{RESTO} \end{array}$$

1°: dividimos $3x^4$ por $2x^2$;

2°: multiplicamos $\frac{3}{2}\,x^2$ por $2x^2 + 6x + 8$;

3°: restamos $3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9$ con el resultado del paso 2;

4°: comenzamos de nuevo con el polinomio obtenido en el paso 3 y así seguimos hasta obtener un polinomio de grado menor que gr[Q(x)].

Decimos que **P(x) es divisible por Q(x)** si el resto, R(x), de la división de P(x) por Q(x) es 0.

Ahora supongamos que $Q(x) = x - a$ y P(x) es un polinomio cualquiera. Por el resultado anterior, sabemos que existen C(x) y R(x) tales que:
$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$, con $gr[R(x)] < gr[Q(x)] = 1$,
o sea, $gr[R(x)] = 0$ o $R(x) = 0$. Entonces, como R(x) es un número, podemos llamarlo solamente R.
Tenemos que $P(x) = C(x) \cdot (x - a) + R$, $\forall$ número real **x**. En particular, si $x = a \Rightarrow P(a) = C(a) \cdot (a - a) + R = R$; luego, $P(a) = R$.

Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio P(x) por un polinomio de la forma $(x - a)$ es P(a).

Si, además, **a** es un cero (o raíz) del polinomio, entonces $P(a) = 0$, con lo cual el resto de dividir P(x) por $(x - a)$ es 0.

Conclusión
P(x) es divisible por (x – a) si y sólo si P(a) = 0, o sea, a es raíz de P(x).

Volvamos al problema 2 de la pág. 14.
Necesitamos resolver $50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 = 5665$, pero vemos que es lo mismo que resolver la ecuación:
$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 - 5665 = 0$
O sea, hallar las raíces de la función polinómica
$P(x) = 50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 - 5665$.
Nos propondremos, entonces, encontrar un método para hallar las raíces de polinomios de grado mayor que 2 (dado que para los de grado 2 ya sabemos cómo hacerlo).
Por ejemplo, de $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.
Como este polinomio tiene término independiente cero, sacamos factor común **x** y obtenemos:
$P(x) = x\,(x^2 - 5x + 6)$
Para encontrar las raíces debemos resolver: $P(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\,(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$ ó $x = 3$ (usando la fórmula resolvente de las ecuaciones cuadráticas) son las raíces del polinomio y, además, utilizando la forma factoreada de la función cuadrática, podemos escribir: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\,(x - 3)$.
Entonces: $P(x) = x\,(x - 2)\,(x - 3)$, que es la forma factoreada de este polinomio.

16. Encuentren un polinomio P(x) sabiendo que el cociente de dividir P(x) por $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 5$ es $C(x) = -2x^2 + 5x - 3$ y el resto, $R(x) = 2x - 5$.

17. Encuentren el cociente y el resto de dividir P(x) por Q(x) en cada caso:
a. $P(x) = x^6 - 3x^2 + 1$
$Q(x) = x^4 + 2x$

b. $P(x) = x^4 - 16$
$Q(x) = x^4 - 2$

18. Hallen el resto de dividir:
a. $P(x) = 9x^8 - 3x^6 + 4x^3 - 3$ por $Q(x) = x + 3$

b. $P(x) = -3x^8 - 8x^7 + 4x - 5$ por $Q(x) = x - 5$

¿Sabían que...?
Paolo Ruffini nació el 22 de septiembre de 1765 en Italia y murió el 10 de mayo de 1822. Su padre, Basilio Ruffini, era médico en Valentano. Cuando Paolo era un adolescente, la familia se mudó a Módena, al norte de Italia. Allí, entró en la universidad, en 1783, donde estudió Matemática, Medicina, Filosofía y Literatura. El 9 de junio de 1788, Ruffini se graduó en Filosofía, Medicina y Cirugía; más tarde, en Matemática. El 15 de octubre de 1788, fue designado profesor de análisis, pero no sólo se dedicó a esta tarea, sino que siguió ejerciendo la medicina.
A causa de las guerras, le exigieron un juramento de lealtad a la república, que él no quiso hacer por su religión. Perdió así su título de profesor y entonces se dedicó solamente a la medicina y a su trabajo más original: probar que la ecuación de grado 5 no se puede resolver con radicales. Esto significaba encontrar una fórmula para las raíces en términos de los coeficientes, que implicara solamente las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (Ruffini quería encontrar una fórmula como la utilizada para resolver ecuaciones cuadráticas). En 1799 publicó un libro donde planteó la teoría general de ecuaciones, en el cual mostró que la solución algebraica de la ecuación general de grado mayor que 4 es imposible.

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 \therefore P(-1) = 2(-1)^3 + 4(-1)^2 - 2(-1) - 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1$ es raíz de $P(x)$, con lo cual $P(x)$ es divisible por
$[x - (-1)] = (x + 1)$. Encontremos el cociente de dicha división:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 & x + 1 \\
- & 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + 2x - 4 \\
\hline
 & 2x^2 - 2x - 4 & \\
- & 2x^2 + 2x & \\
\hline
 & -4x - 4 & \\
- & -4x - 4 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore P(x) = (x + 1) . (2x^2 + 2x - 4)$
Pero, entonces, la ecuación $P(x) = 0$ se transforma en
$(x + 1) . (2x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow (x + 1) = 0$ ó $(2x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -1$ ó $(2x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow$ (utilizando la fórmula resolvente)
$\Rightarrow x = 1$ ó $x = -2$. Además, $2x^2 + 2x - 4 = 2\,(x - 1)\,[\,x - (-2)] \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) = 2\,(x + 1)\,(x - 1)\,[\,x - (-2)]$.
Logramos así hallar las raíces de la función polinómica y escribirla de forma factoreada.
Como es tan útil poder dividir polinomios de cualquier grado por un polinomio de la forma $(x - a)$, existe la siguiente regla:

- *Ubicamos los coeficientes de P(x).*
- *Bajamos el primer coeficiente.*
- *Multiplicamos el primer coeficiente por* ***a****, lo colocamos bajo el segundo y sumamos.*
- *Repetimos el paso anterior con los siguientes coeficientes hasta terminar. El último número obtenido es el resto.*

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 4 & -2 & -4 \\
 & & + & + & + \\
a \quad -1 & & -2 & -2 & 4 \\
\hline
 & 2 & 2 & -4 & 0 \\
\end{array}$$

RESTO

Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es un método sencillo para dividir un polinomio cualquiera por un polinomio mónico de grado 1, o sea, por un polinomio de la forma $(x - a)$.

Analicemos ahora la siguiente función polinómica:
$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12$
Para encontrar una raíz, calculamos $P(1)$:
$P(1) = 3 . 1^4 - 12 . 1^3 + 9 . 1^2 + 12 - 12 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$, con lo cual $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Utilizando la regla de Ruffini, obtenemos que $P(x) = (x - 1) . (3x^3 - 9x^2 + 12)$ y si llamamos

$Q_1(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12$, y buscamos una raíz de $Q_1(x)$, vemos que como $Q_1(2) = 3x^3 - 9x^2 + 12 = 3 \,.\, 2^3 - 9 \,.\, 2^2 + 12 = 0 \Rightarrow 2$ es raíz.
Luego, con la regla de Ruffini: $Q_1(x) = (x - 2)\,(3 \,.\, x^2 - 3x - 6)$.
Llamando $Q_2(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3\,(x + 1) \,.\, (x - 2)$
$\therefore P(x) = 3(x - 1)\,(x - 2)\,(x + 1)\,(x - 2) = 3(x - 1)\,(x - 2)^2\,(x + 1)$

Con todo esto observamos que si tenemos un polinomio P(x) de grado **n** y encontramos una raíz x_1, logramos escribirlo de la forma $P(x) = (x - x_1) \,.\, Q(x)$ y $gr[Q(x)] = n - 1$. Las raíces de Q(x) serán también raíces de P(x); debemos, entonces, calcular las raíces de Q(x) con un procedimiento similar al de P(x) pero para un grado menos. Si en algún momento obtenemos un polinomio de grado 2, podremos utilizar la fórmula resolvente.

Conclusión
Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.

La raíz **a** de P(x) es raíz de **multiplicidad m** si podemos escribir a P(x) de la forma $P(x) = (x - a)^m \,.\, Q(x)$, donde Q(x) es un polinomio con $Q(a) \neq 0$.

Por ejemplo:
$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12$
Como $P(x) = 3(x - 1)\,(x - 2)\,(x + 1)\,(x - 2) = 3(x - 1)\,(x - 2)^2\,(x + 1)$
1 y –1 son raíces de P(x), de multiplicidad 1 (raíces simples) y 2 es una raíz de multiplicidad 2 (raíz doble).

Decimos que un polinomio está escrito en **forma factoreada** si lo escribimos como producto de polinomios de grado 1 o de grado 2, sin raíces reales.

Por ejemplo:
$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12$ en forma factoreada se escribe como $P(x) = 3(x - 1)\,(x - 2)^2\,(x + 1)$.

Ahora bien, una vez que encontramos una raíz, utilizando la regla de Ruffini vamos buscando raíces de polinomios de grado menor. ¿Cómo encontrar la primera raíz?
Lamentablemente, para encontrar raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3 no hay fórmulas, como para los polinomios de grado 2, y no podemos despejar. Entonces, lo que debemos hacer es "tantear" una raíz.
Tantear significa ir probando a mano para encontrar alguna raíz. Los matemáticos buscaron formas de tantear menos engorrosas, o sea, saber qué valores probar para ver si son raíces.

Algo más...
En algunos polinomios especiales, es posible encontrar su forma factoreada utilizando otros caminos más cortos. Para ello, veamos algunos de éstos:

Factor común
Si el polinomio tiene término independiente cero, entonces $P(0) = 0$; luego, 0 es raíz del polinomio y todos los términos tienen **x**, con lo cual, sacando factor común **x**, podemos escribir:
$P(x) = x \,.\, Q(x)$ con Q(x) de un grado menos que P(x) y para buscar el resto de las raíces de P(x) buscamos las raíces de Q(x).
Por ejemplo:
$x^4 - 3x^2 + 2x = x\,(x^3 - 3x + 2)$

Trinomio cuadrado perfecto
$(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b) =$
$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Análogamente:
$(a - b)^2 = (a - b) \,.\, (a - b) =$
$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Por esto, podemos factorear las expresiones:
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
Por ejemplo:
$P(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \,.\, 3x + 1 =$
$= (3x - 1)^2$

Diferencia de cuadrados
$(a - b) \,.\, (a + b) = a^2 - ab + ab - b^2 =$
$= a^2 - b^2$
Por esto, podemos factorear la expresión:
$a^2 - b^2 = (a - b) \,.\, (a + b)$
Por ejemplo:
$x^4 - 16 = (\,(x^2)^2 - 4^2) = (x^2 - 4) \,.\, (x^2 + 4) =$
$(x^2 - 2^2) \,.\, (x^2 + 4) = (x - 2) \,.\, (x + 2) \,.\, (x^2 + 4)$

19. Encuentren el cociente y el resto de dividir $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ por $Q_1(x) = x + 5$ y por $Q_2(x) = x - 6$.

20. Encuentren las soluciones racionales de las siguientes ecuaciones:

a. $x^3 - x^2 + 2 = 4x - x^3$

b. $x^4 + x^3 = 3x^2 + 4x + 4$

c. $60x^3 - 67x^2 + 21x - 2 = 0$

¿Sabían que...?
Un **lema** es una proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema.

Gauss propuso el siguiente razonamiento:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ un polinomio con todos los coeficientes enteros, y sea $\frac{p}{q}$ una raíz racional de P(x) escrita en forma irreducible ($p, q \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow 0 = P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 =$$

$$= \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \Rightarrow$$

si dividimos todo por **p** obtenemos:

$$\frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{p} = \frac{0}{p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + \frac{a_0 q^n}{p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_0 q^n}{p} = -(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + ... + a_1 q^{n-1}) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

p debe dividir a $\mathbf{a_0 q^n}$, pero como **p** y **q** no tienen divisores comunes pues la fracción es irreducible, **p** debe ser divisor de $\mathbf{a_0}$.
Con un razonamiento análogo, llegamos a la conclusión de que **q** debe dividir a $\mathbf{a_n}$.

Lema de Gauss

Sea P(x) un polinomio de grado **n** con todos sus coeficientes enteros. Si el número racional $\frac{p}{q}$, escrito de manera irreducible, es raíz de P(x); entonces, **p** divide al término independiente y **q** divide al coeficiente principal.

Por ejemplo:
Hallemos una raíz racional del polinomio
$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4$
Para ello, veamos que:

$a_0 = 4$; luego, sus divisores son: 4; –4; 2; –2; 1; –1

$a_n = 3$; luego, sus divisores son: 3; –3; 1; –1

Los posibles $\frac{p}{q}$ son, entonces:

$$\frac{4}{3};\ -\frac{4}{3};\ 4; -4;\ \frac{2}{3};-\frac{2}{3};\ 2; -2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3};\ 1; -1$$

Luego, debemos probar con ellos:

$P\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}; P\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}; P(4) = 140; P(-4) = -196; P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

Logramos así encontrar una raíz racional del polinomio P(x), $x_1 = \frac{2}{3}$. Para hallar las otras raíces, podemos dividir P(x) por $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ utilizando la regla de Ruffini, y obtenemos:

	3	−2	−6	4
		+	+	+
$\frac{2}{3}$		2	0	−4
	3	0	−6	$\boxed{0}$

$P(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right) . (3x^2 - 6)$

Las raíces de $Q(x) = 3x^2 - 6$, $x_2 = \sqrt{2}$ y $x_3 = -\sqrt{2}$ son las otras raíces de P(x).

Tenemos ahora un método para resolver la ecuación del problema 2 y averiguar las dimensiones máximas de la pileta:

$$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 = 5665$$
$$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 - 5665 = 0$$
$$50x^3 + 375x^2 + 280x - 5565 = 0$$

Tanteando, obtenemos que una solución es 3, dado que $50 . 3^3 + 375 . 3^2 + 280 . 3 - 5565 = 0$; luego, para hallar los otros valores con la regla de Ruffini obtenemos:

$50x^3 + 375x^2 + 280x - 5565 = (x - 3) . (50x^2 + 525x + 1855)$

Como la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales, x = 3 es la única solución de la ecuación original.

La respuesta al problema 2 de la página 12, entonces, es que Claudia puede construir una pileta de 3 m de ancho.

Problema 5

En un laboratorio comenzaron a las 6 A. M. a medir la temperatura, en grados, de una sustancia durante cierto día, y obtuvieron la fórmula $f(t) = 0{,}01\ t^3 - 0.36\ t^2 + 2{,}88\ t$, donde **t** es el tiempo medido en horas desde el inicio de la medición.

a. ¿A qué hora la temperatura era sobre cero?

b. ¿A qué hora la temperatura era bajo cero?

c. ¿En algún momento la temperatura fue de 6º?

21. Encuentren la forma factoreada de los siguientes polinomios:

a. $F(x) = -24x^3 - 8x^2 + 6x + 2$

b. $R(x) = 81x^4 - 16$

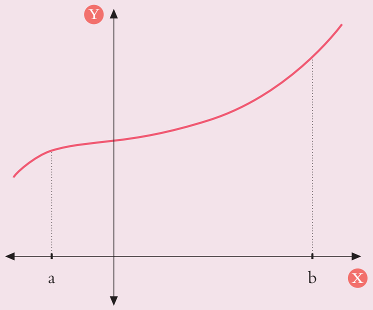
c. $T(x) = -3x^5 - 2x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 4x$

22. Hallen un polinomio de grado 4 que tenga a $\frac{1}{4}$ como raíz de multiplicidad 4 y cuya ordenada al origen sea 5 . Grafíquenlo.

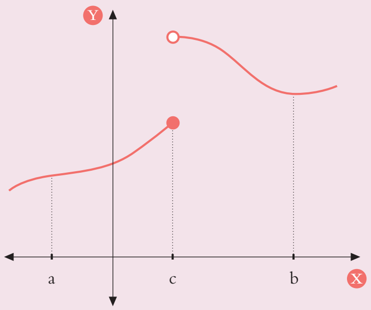
Algo más...

¿Qué significa que una función sea de trazo continuo en un intervalo?

En el Libro 5, analizaremos qué significa que una función sea continua en un punto y, por lo tanto, en un intervalo. Coloquialmente, podemos decir que una función es de trazo continuo en un intervalo (a, b) cuando para dibujarla no tenemos que levantar el lápiz. Veamos algunos ejemplos:



Ésta es una función continua en el intervalo (a, b).



Ésta no es una función continua en el intervalo (a, b) pues no es continua en x = c.

Problema 5

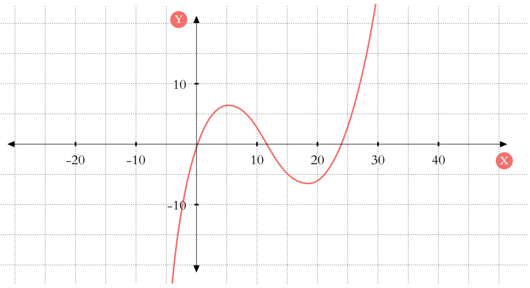
Para saber a qué hora la temperatura era sobre cero, debemos resolver una inecuación: $0{,}01\ t^3 - 0\ .\ 36\ t^2 + 2{,}88\ t > 0$, para ello factoricemos el polinomio:

$0{,}01\ t^3 - 0{,}36\ t^2 + 2{,}88\ t = 0{,}01\ t\ (t - 12)\ (t - 24) > 0$

Grafiquemos la función

$f(x) = 0{,}01\ t^3 - 0{,}36\ t^2 + 2{,}88\ t = 0{,}01\ t\ (t - 12)\ (t - 24)$

Sus raíces son 0, 12 y 24; su ordenada al origen, 0.



Si analizamos el gráfico, podemos ver que la temperatura fue sobre cero entre las 0 y las 12 horas de comenzada la medición, o sea entre las 6 y las 18 horas; y que fue bajo cero entre las 12 y las 24 horas de iniciada la medición, o sea, entre las 18 hs. y las 6 hs. del día siguiente.

Podemos ver, además, que a las 6 horas de medición la temperatura fue $f(6) = 0{,}01\ .\ 6^3 - 0{,}36\ .\ 6^2 + 2{,}88\ .\ 6 = 6{,}48$, y a las 7 horas de medición, $f(7) = 0{,}01\ .\ 7^3 - 0{,}36\ .\ 7^2 + 2{,}88\ .\ 7 = 5{,}95$. Luego, como la gráfica es de trazo continuo, debe haber un valor de **t** tal que f(t) = 6.

Teorema del valor medio de Cauchy

Si una función **f** es de trazo continuo en un intervalo [a, b] y f(a) ≠ f(b), entonces para todo **k** que esté entre f(a) y f(b) existe por lo menos un valor **x** ∈ [a, b] tal que f(x) = k.

En otras palabras, **f** toma todos los valores entre f(a) y f(b). En particular, si f(a) < 0 y f(b) > 0, entonces 0 está entre f(a) y f(b); luego, existe un x ∈ [a, b] tal que f(x) = 0.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si una función f(x) es de trazo continuo en un intervalo I y existen a ∈ I, b ∈ I /f(a) < 0 y f(b) > 0, entonces existe, por lo menos, un c ∈ I / f(c) = 0.

Supongamos ahora que x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas de una función de trazo continuo f(x), y que **a** y **b** son dos valores entre x_1 y x_2 tales que f(a) < 0 y f(b) > 0; por el teorema anterior, debería existir un valor **c** entre **a** y **b** tal que f(c) = 0, o sea, **c** sería una raíz de la función. Esto no puede ocurrir porque **c** está entre x_1 y x_2, que eran dos raíces consecutivas; luego, f(a) y f(b) deben ser del mismo signo, o sea:

Corolario del teorema de Bolzano-Weierstrass
Entre dos raíces consecutivas de una función de trazo continuo, la función no cambia de signo. O es positiva o es negativa.

Analicemos las gráficas de ciertas funciones polinómicas:

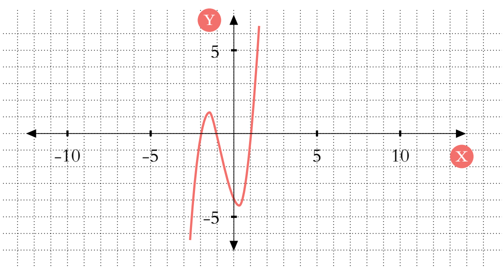
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-1)(x+2)$ [5]

Como vemos, las raíces son –1, 1 y –2, y la ordenada al origen es P(0) = –4. Analicemos el conjunto de positividad y de negatividad de P(x). Por el corolario del Teorema de Bolzano-Weierstrass, como es de trazo continuo, sólo puede cambiar de signo en las raíces, con lo cual para saber el signo entre dos raíces basta verlo en un punto, o sea:

–2 –1 1

P(–4) = –60 P(–1, 1) = 0,378 P(0) = –4 P(2) = 24

Luego $C^- = (-\infty, -2) \cup (-1, 1)$ y $C^+ = (-2, -1) \cup (1, +\infty)$ y su gráfica aproximada es:



$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12 = 3(x-1)(x-2)^2(x+1)$ [6]

Las raíces son 1, –1 y 2 (dos veces), y la ordenada al origen es P(0) = –12.
Analicemos el conjunto de positividad y de negatividad de P(x) en los distintos intervalos que quedan formados entre las raíces:

–1 1 2

P(–4) = 1620 P(0) = –12 P(1,5) = 0,9375 P(4) = 180

[5] Ver forma factoreada, página 24.
[6] Ver forma factoreada, página 25.

23. Dadas las siguientes funciones, hallen: dominio, intersección con los ejes, intervalos de positividad y de negatividad, y gráfico aproximado:

a. $F(x) = x^3 - 8$

b. $Z(x) = (x^3 - \frac{9}{4})(-x^2 - x + 2)$

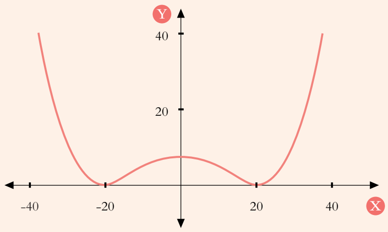
c. $H(x) = (3x - 2)(4x + 1)(x - 5)$

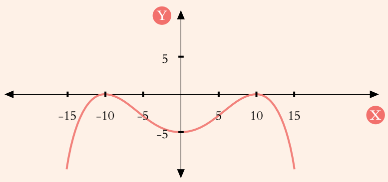
24. a. Encuentren la fórmula de una función polinómica cuyo grado sea 9 y sus únicas raíces sean 2, –3 y 4.

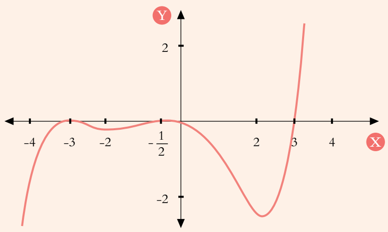
b. ¿Existe una única función que verifica lo anterior?

25. Dada la función polinómica $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, ¿podemos afirmar que existe un valor de **x** tal que $f(x) = 2{,}8$? Expliquen por qué.

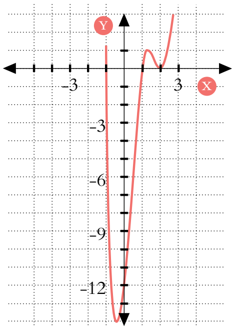
26. Encuentren la fórmula de una función de grado mínimo cuya gráfica sea:







Luego $C^- = (-1, 1)$ y $C^+ = (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, y su gráfica aproximada es:



Analizando las dos gráficas anteriores, vemos que aunque ésta puede cambiar de signo sólo en las raíces, no cambia si la raíz tiene multiplicidad par.

Conclusión

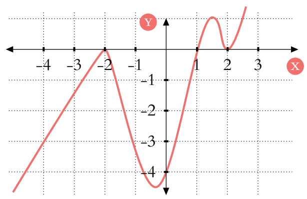
Si una raíz es de multiplicidad par, la gráfica de la función polinómica llega allí, roza y sigue para el mismo lado. Si una raíz es de multiplicidad impar, la gráfica cruza allí el eje.

Problema 6

Tracen la gráfica y hallen la fórmula de una función polinómica de grado 11 cuyas únicas raíces sean –2, 1 y 2, cuya ordenada al origen sea –4 y cuyo conjunto de positividad sea $C^+ = (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Problema 6

Una posible gráfica es la siguiente:



Vemos entonces que en las raíces –2 y 2 no corta al eje; luego, deben ser de multiplicidad par; en cambio, en la raíz 1 cambia de signo, o sea, su multiplicidad debe ser impar.

Su fórmula será: $P(x) = a\,(x+2)^n\,(x-1)^m\,(x-2)^r$ con $n + m + r = 11$, **n** y **r** pares y **m** impar. Por ejemplo:

$P(x) = a\,(x+2)^2\,(x-1)^3\,(x-2)^6$ y como $P(0) = -4$ entonces

$$-4 = a\,(0+2)^2\,(0-1)^3\,(0-2)^6 = a\,(-256) \therefore a = \frac{1}{64}$$

$$P(x) = \frac{1}{64}\,(x+2)^2\,(x-1)^3\,(x-2)^6$$

Las páginas 29 a la 111
no están disponibles

Matemática | Polimodal

Funciones 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

Serie Libros Temáticos de Matemática

longseller

Código interno: 1922
ISBN 987-550-039-9

9 789875 500396